Bevezetés az algebrába 1

Egész számok

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Egész számok és sorozataik

Egész számok és sorozataik

Számok

- Egész számok: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (*Zahlen*)
- Pozitív egész számok: $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ (*Natural*)
- Nemnegatív egész számok: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Természetes számoknak az előző két halmaz valamelyikét szokás nevezni, nincs egységes terminológia. Jelölése: $\mathbb{N}$.
- A természetes számok halmazára igaz, hogy bármely nem üres részhalmazának van legkisebb eleme (az e tulajdonsággal rendelkező halmazokat jólrendezett halmazoknak nevezzük).
- Az egészek halmaza nem jólrendezett halmaz.
- Valós számok halmaza: $\mathbb{R}$.
- A természetes számok rendelkeznek az arkhimédészi tulajdonsággal (Arkhimédészi axióma): Minden $x \in \mathbb{R}$ valós számhoz van olyan n természetes szám, hogy $x < n$.

D Racionális számok: $\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$ (*Quotient*), a nem racionális valósokat irracionális számoknak nevezzük.

F Jólrendezett-e a nemnegatív racionális számok halmaza?

m Nem. A teljes halmaznak ugyan van legkisebb eleme, a 0, de van olyan nemüres részhalmaz, amelynek nincs. Ilyen például egy végtelen leszálló sorozat: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.

D Algebrai számok: gyökei valamely egész együtthatós polinomnak (pl. $\sqrt{2}$ gyöke a $x^2 - 2$ polinomnak). A racionális számok is algebrai számok. A nem algebrai számokat transzcendens számoknak nevezzük (pl. π).

T A $\sqrt{2}$ irracionális.

B Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális, azaz van olyan p és q természetes szám, hogy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Ekkor $p = q\sqrt{2}$, tehát

$$q \in H = \left\{ n \in \mathbb{N}^+ \mid n\sqrt{2} \text{ is egész} \right\} \Rightarrow \emptyset \neq H \subseteq \mathbb{N}^+.$$

$\mathbb{N}^+$ jólrendezett, ezért H-nak van legkisebb eleme: a.

$b := a(\sqrt{2} - 1) = a\sqrt{2} - a$ is egész, és $\sqrt{2} - 1 > 0$ miatt pozitív, továbbá $b\sqrt{2} = 2a - a\sqrt{2}$ is egész, így $b \in H$.

Viszont $\sqrt{2} - 1 < 1$ miatt $b < a$. $\lightning$

Ellentmondás!

Mj *Vegyük észre, hogy ez a bizonyítás, ellentétben a középiskolában tanulttal, nem használja az egyértelmű prímfelbontást. Próbáljunk meg hasonló bizonyítást találni tetszőleges $\sqrt{d}$ irracionalitására, ahol $d \in \mathbb{N}^+$ nem négyzetszám.*

Egész számok és sorozataik

Egészrész-függvény

D Egy x valós szám (alsó) egész részén azt a legnagyobb egészt értjük (jelölése $\lfloor x \rfloor$ vagy $[x]$), mely kisebb vagy egyenlő x-nél, azaz melyre $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. *(Miért létezik ilyen?)* x tört része $\{x\} = x - \lfloor .x \rfloor$.

- $\lfloor 0 \rfloor = 0$, $\lfloor -\frac{1}{1000} \rfloor = -1$, $\lfloor 12.81 \rfloor = 12$, $\lfloor -12.81 \rfloor = -13$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$,
- $\{\frac{9}{4}\} = \frac{1}{4}$, $\{-\frac{9}{4}\} = \frac{3}{4}$.

D Felső egész rész: az az $\lceil x \rceil$ egész, amelyre $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$.

- $\lceil 12.81 \rceil = 13$, $\lceil -12.81 \rceil = -12$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -\pi \rceil = -3$,
- $0 \leqslant \{x\} < 1$.

F1 Kifjezhető-e a felső egész rész az alsó egész rész segítségével?

F2 Igazoljuk, hogy $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$

F3 Igazoljuk, hogy $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

T $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$-ben, azaz

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \ a < b\text{-re } \exists r \in \mathbb{Q}:\ \ a < r < b$$

B *Terv: olyan kis $\frac{1}{n}$-et keresünk, hogy $\frac{1}{n}$-enként lépegetve ne ugorhassuk át az (a, b) intervallumot.*

Arkhimédeszi axióma $\Rightarrow \exists n$: $n > \frac{1}{b-a}$, azaz $\frac{1}{n} < b - a$.

$k \in \mathbb{Z}$ a legkisebb, hogy $a < \frac{k}{n} \Leftrightarrow$

$k \in \mathbb{Z}$ a legkisebb, hogy $an < k \Leftrightarrow$

$k = \lfloor an \rfloor + 1$. Így

$$k - 1 \leqslant an < k$$

$$\frac{k-1}{n} \leqslant a < \frac{k}{n} \leqslant a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b.$$

Kérdés: Mennyire közelítenek jól a racionális számok?

Akármennyire, ha a nevező nagy. Nyilván minden $a \in \mathbb{R}$-hez és $n \in \mathbb{N}^+$-hoz van $p \in \mathbb{Z}$, hogy $|a - \frac{p}{n}| \leqslant \frac{1}{2n}$.

És ha a nevezőt korlátozzuk?

T **Dirichlet approximációs tétele**

Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ valós számhoz és tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ számhoz létezik olyan $p, q \in \mathbb{Z}$, ahol $1 \leqslant q \leqslant n$, hogy

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{n}, \quad \text{azaz} \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq}.$$

B A skatulyaelv szerint a 0, $\{\alpha\}$, $\{2\alpha\}$,..., $\{n\alpha\}$ számok között van kettő, amelyik azonos intervallumba esik a következők közül: $[0, \frac{1}{n})$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$, $[\frac{2}{n}, \frac{3}{n})$,... $[\frac{n-1}{n}, 1)$.

Legyen $|\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| < \frac{1}{n}$, ahol $i < j$.

Ezt átalakítva:

$$\frac{1}{n} > |\{j\alpha\} - \{i\alpha\}| = |(j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor) - (i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor)| =$$

$$= |(j - i)\alpha - (\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor)|$$

Tehát $q = j - i$ és $p = \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$ megfelel.

T **Irracionális számok approximációs tétele**

Tetszőleges α irracionális számhoz végtelen sok olyan $\frac{p}{q}$ tört létezik, melyre

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$$

Mj *Feltehető, hogy $q > 0$.*

Mj *Ha $\frac{p}{q}$ kielégíti a fenti egyenlőtlenséget, akkor csak véges sok bővítése van, ami ugyancsak kielégíti.*

Mj *Ennél több is igazolható, nevezetesen az is igaz, hogy végtelen sok olyan $\frac{p}{q}$ tört létezik, melyre*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$$

B A Dirichlet-approximációból tetszőleges n_1-re van p_1, q_1:

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| < \frac{1}{n_1 q_1} \leqslant \frac{1}{q_1^2}$$

α irracionális $\rightsquigarrow \exists n_2$: $\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| > \frac{1}{n_2}$. A Dirichlet-approximáció adja n_2-höz a $\frac{p_2}{q_2}$ törtet.

$$\left|\alpha - \frac{p_2}{q_2}\right| < \frac{1}{n_2 q_2} \leqslant \frac{1}{n_2} < \left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right|.$$

$\rightsquigarrow \dfrac{p_2}{q_2} \neq \dfrac{p_1}{q_1}$, stb. n_{k+1} választása: $|\alpha - \frac{p_i}{q_i}| > \frac{1}{n_{k+1}}$ $(i = 1, \ldots, k)$.

P $|\sqrt{2} - \frac{7}{5}| \approx 0.0142 < 0.04 = \frac{1}{25}$
$|\sqrt{2} - \frac{8}{6}| \approx 0.08088 > 0.02\dot{7} = \frac{1}{36}$,
$|\sqrt{2} - \frac{9}{6}| \approx |-0.085786| > 0.02\dot{7} = \frac{1}{36}$
$|\pi - \frac{22}{7}| \approx |-0.00126| < 0.0029 < \frac{1}{7^3}$

F Hamis-e az állítás racionálisokra?

Egész számok és sorozataik

Indukció

- Indukció: következtetés az egyes esetekből az általánosra (általában bizonyos valószínűséggel).
- Teljes indukció (mathematical induction): ha egy n paramétertől függő állítás igaz valamely $n_0 \in \mathbb{N}_0$ kezdőértékre, és az állítás öröklődik bárnely n_0-nál nagyobb egészről az 1-gyel nagyobb egészre, akkor igaz minden n-re, melyre $n \geqslant n_0$. Formulával:

T Teljes indukció Ha $n_0 \in I \subseteq \mathbb{Z}_{\geqslant n_0} := \{n_0, n_0 + 1, \ldots\}$, és $n \in I$ esetén $n + 1 \in I$, akkor $I = \mathbb{Z}_{\geqslant n_0}$.

B A teljes indukció következik a természetes számok jólrendezettségéből: Ha nem igaz, akkor $\mathbb{Z}_{\geqslant n_0} \setminus I$-nak kellene, hogy legyen legkisebb m eleme, mert $\mathbb{Z}_{\geqslant n_0}$ is jólrendezett. De akkor $n_0 \leqslant m - 1 \in I$, és így $m \in I$. ↯

- A teljes indukció egy másik változata következik az előzőből:

T Ha a P állítás „igaz n_0-ra”, és „ha igaz valamely n esetén minden $n_0, n_0 + 1, \ldots, n$ egészre, akkor igaz $n + 1$-re is”, akkor P igaz minden $n \geqslant n_0$ egészre.

P $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

m Leosztva 2-vel a következő alakot kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k+1}{2} = \binom{n+2}{3}$$

(1. mo) teljes indukció: $n = 1$ esetén $\binom{2}{2} = \binom{3}{3}$ ✓

$n \Rightarrow n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{k+1}{2} = \sum_{k=1}^{n} \binom{k+1}{2} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+2}{3} + \binom{n+2}{2} = \binom{n+3}{3}$$

(2. mo) kombinatorikai: $n+3$ elemből úgy választhatunk ki kettőt, hogy sorba rakjuk őket, kivesszük az elsőt (az első n elem közül), majd a másik kettőt a sorban hátrébb lévők közül.

F $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

F Hány éle van egy n-csúcsú fának?

[Útmutatás: hagyjuk el a fa egy tetszőleges élét]

Egész számok és sorozataik

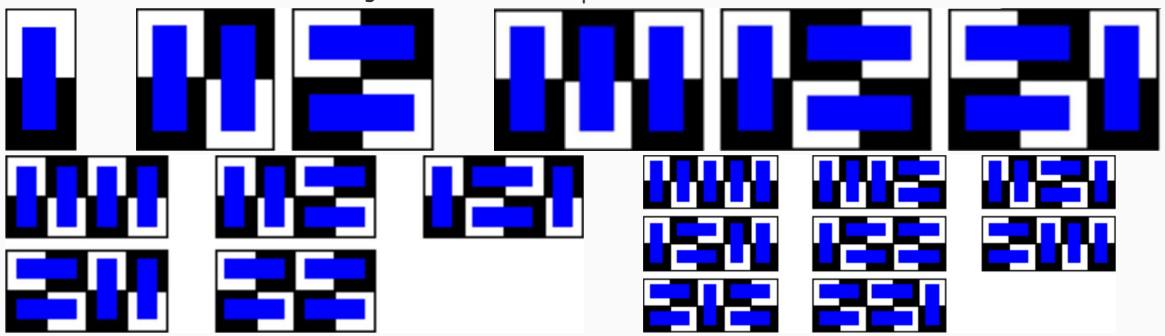
Rekurzió

Rekurzív sorozat: a sorozat n-edik tagjának definíciójában a kisebb indexű tagok is szerepelnek.

D Fibonacci-sorozat $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (első néhány tagja: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ..., (OEIS A000045)

P Hányféleképp fedhető le egy $2 \times n$-es sakktábla n dominóval?

m Grafikus bizonyítás: f_{n+1}.



F Általánosított Fibonacci-sorozat: Legyen $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$, $g_0 = a$, $g_1 = b$. Igazoljuk, hogy $g_n = af_{n-1} + bf_n$.

F1 Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, melyben nincs két szomszédos szám?

F2 Hány olyan n-hosszú sorozat képezhető az 1, 2, 3, 4 számokból, melyek 1-gyel kezdődnek, és minden szám pontosan 1-gyel különbözik az előzőtől?

F3 Mennyivel egyenlő az alábbi n törtvonalat tartalmazó tört?

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1+1}}}}$$

Egész számok és sorozataik

Lánctörtek*

Legyen $x \in \mathbb{R}$, $a_0 = \lfloor x \rfloor$,

$x_1 = \{x\} \rightsquigarrow x = a_0 + x_1 = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{x_1}}$, ha $x_1 \neq 0$.

$a_1 = \left\lfloor \dfrac{1}{x_1} \right\rfloor$, $x_2 = \left\{ \dfrac{1}{x_1} \right\} \rightsquigarrow$

$x = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + x_2} = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{1}{x_2}}}$, ha $x_2 \neq 0, \ldots$

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + x_{n+1}}}}}$$

J $x = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n + x_{n+1}]$

Ha valamely n-re $x_{n+1} = 0$, akkor $x = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$, egyébként x végtelen lánctört alakja $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, melynek $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ az n-edik szelete.

P $\sqrt{2}$ lánctört alakja: $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \ldots]$ (A040000)

m $x = \sqrt{2}$, $a_0 = 1$, $x_1 = \sqrt{2} - 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1)$,
$a_1 = 2$, $x_2 = \sqrt{2} - 1, \ldots$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

P $e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$ (A003417),
$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \ldots]$ (A001203),
$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots]$ (A000012), az aranymetszés aránya (a kisebbik úgy aránylik a nagyobbikhoz, mint a nagyobbik az egészhez).

T Egy szám lánctört alakja pontosan akkor véges, ha a szám racionális.

T Ha az x irracionális szám lánctört alakja $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, és n-edik szelete $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{r_n}{s_n}$, ahol r_n és s_n relatív prímek, akkor minden n-re

$$\left| x - \frac{r_n}{s_n} \right| < \frac{1}{s_n^2},$$

és bármely két egymást követő szelet legalább egyikére

$$\left| x - \frac{r_n}{s_n} \right| < \frac{1}{2s_n^2}$$

is fennáll.

P π szeletei: $3 = [3]$, $22/7 = [3, 7]$, $333/106 = [3, 7, 15]$, $355/113 = [3, 7, 15, 1]$, $103993/33102 = [3, 7, 15, 1, 292]$, $104348/33215 = [3, 7, 15, 1, 292, 1]$,...