Bevezetés az algebrába 1

Komplex számok

Wettl Ferenc diái alapján

A komplex számtest

A komplex számtest

Motiváció

- pozitív egészek – összeadás, szorzás
- $a + x = b$ megoldhatósága $\to$ negatív számok és 0
- $ax = b$ megoldhatósága $\to$ racionális számok
- $x^2 = 2$ megoldása $\to$ vannak nem racionális számok is
- sorozatok határértékének fogalma $\to$ irracionális számok
- racionális + irracionális számok $\to$ valós számok
- az $x^2 = -1$ egyenlet megoldásával lesz további bővítés???

D Egy K test algebrailag zárt, ha bármely nem konstans K-beli együtthatós polinomnak van K-ban zérushelye.

P $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$ tehát nem zárt, mert $x^2 + 1$-nek nincs zérushelye ezekben a testekben, de nem zárt pl. $\mathbb{Z}_5$ sem, mert az $x^2 + 2$ polinomnak $\mathbb{Z}_5$-ben nincs zérushelye.

T (Ernst Steinitz, 1910) Minden K test beágyazható algebrailag zárt testbe, melyek közt létezik legszűkebb, a K algebrai lezártja.

- A másodfokú $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldóképlete:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

egyszerűen levezethető.

- A harmadfokú egyenletek (a változó módosításával) $x^3 + px + q = 0$ alakra hozhatók, és erre a Cardano–képlet (Tartaglia, 1535):

$$x = u + v, \text{ ahol } u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \text{ és } v = -\frac{p}{3u}$$

Itt akkor is kell negatív számból gyököt vonni, ha az egyenlet minden gyöke valós.

- A negyedfokú egyenletekre is létezik megoldóképlet, viszont a legalább ötödfokúakra nincs, és nem is lehet (Abel–Ruffini-tétel, 1824)

A komplex számtest

A konstrukció

Tegyük fel, hogy van egy olyan K test, amely tartalmazza $\mathbb{R}$-et, és amelyben a -1-nek van négyzetgyöke: legyen $i \in K$ olyan, hogy $i^2 = -1$. Ekkor

- $i \notin \mathbb{R}$, mert $\mathbb{R}$-ben $x^2 \geq 0 \ \forall x$.
- Az $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ alakú elemek felírása egyértelmű:
  Ha $a + bi = c + di$, és $b \neq d \rightsquigarrow i = \frac{a-c}{d-b} \in \mathbb{R}$ ↯
  Tehát $b = d \rightsquigarrow a = c$.
- Az $a + bi$ alakú elemek is testet (K-ban résztestet) alkotnak, mert ezek halmaza zárt a négy alapműveletre:
  $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
  $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$
  $(a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + adi + bci = (ac - bd) + (ad + bc)i$
  $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$
  (Az átalakításokban használjuk a testaxiómákat, és hogy $i^2 = -1$.)

D

A komplex számtest

$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ formális kifejezések*,

$$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi)(c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$$

* $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ és $b = d$.

Azonosítjuk: $\begin{cases} a \in \mathbb{R} & \leftrightarrow \quad a + 0i \\ i & \leftrightarrow \quad 0 + 1i \end{cases}$

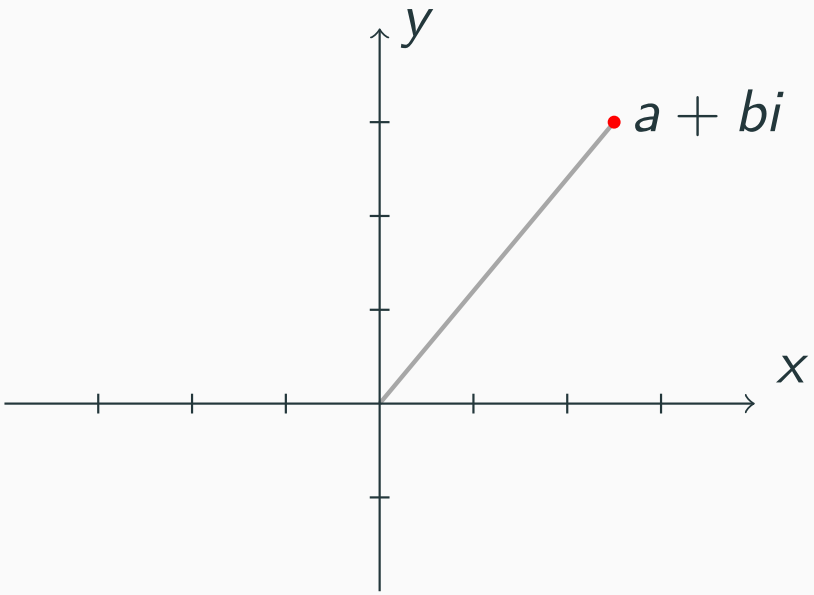
Így $\mathbb{R} \leq K$ (azaz $\mathbb{R}$ részteste K-nak), és

$a + bi = a + b \cdot i$ (pontosabban $a + bi = (a + 0i) + (b + 0i)(0 + 1i)$.)

Ellenőrizhető, hogy ez a $\mathbb{C}$ kielégíti a testaxiómákat.

(Pl. $-(a + bi) = (-a) + (-b)i$ és $(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i$ megfelel additív és multiplikatív inverznek.)

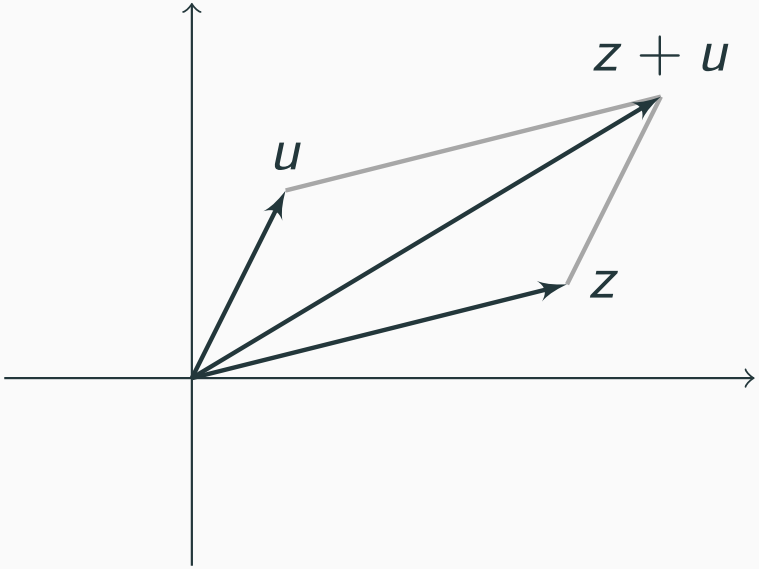
A komplex számsík



$a + bi$ az (a, b) koordinátájú pont

$\mathbb{R}$ az x tengely

A komplex számok összeadása a vektorok összeadásának felel meg.



Ezért a komplex számokat gyakran a sík vektoraival azonosítjuk.

D **komplex szám algebrai alakja**

A $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ alakú kifejezést a komplex szám algebrai alakjának nevezzük (i mint imaginárius, képzeletbeli). Az a szám a z valós része, a b az imaginárius, jelölése: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$

D **konjugált**

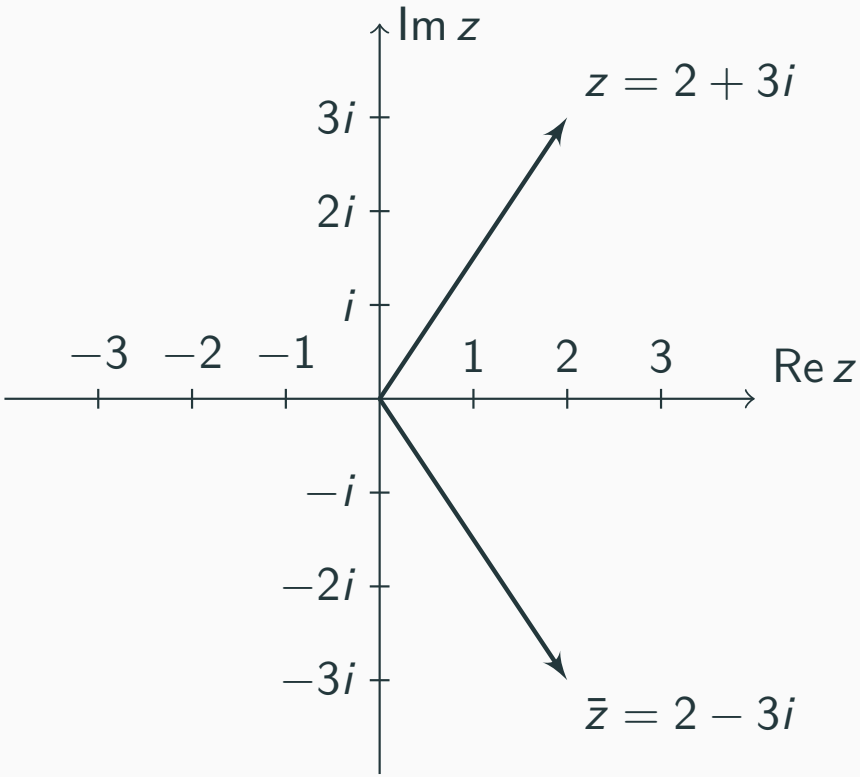
$\bar{z} = a - \mathrm{i}b$, ahol $z = a + \mathrm{i}b$

D **abszolút érték**

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$, azaz a z-hez tartozó (hely)vektor hossza.

Osztás algebrai alakban:

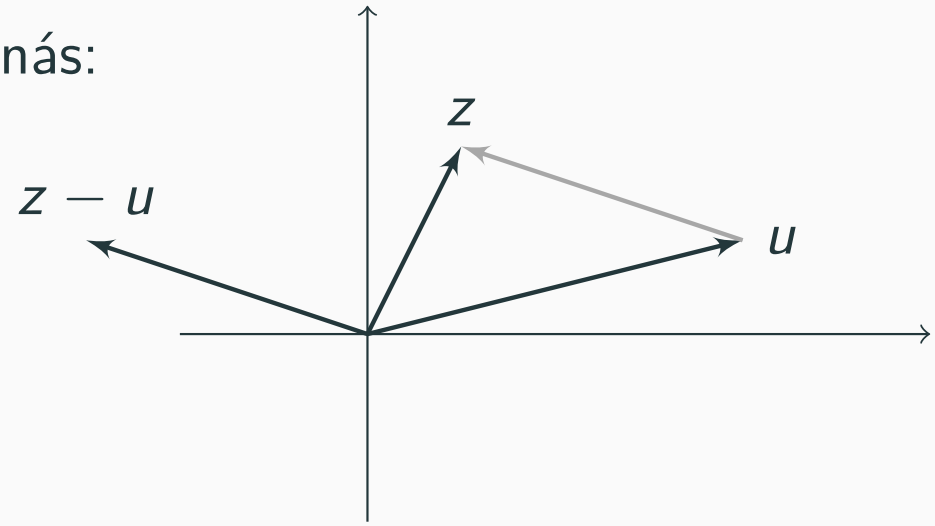
$$\frac{u}{z} = \frac{u\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{u\bar{z}}{|z|^2}$$



$$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{13}$$

távolság az origótól

Kivonás:

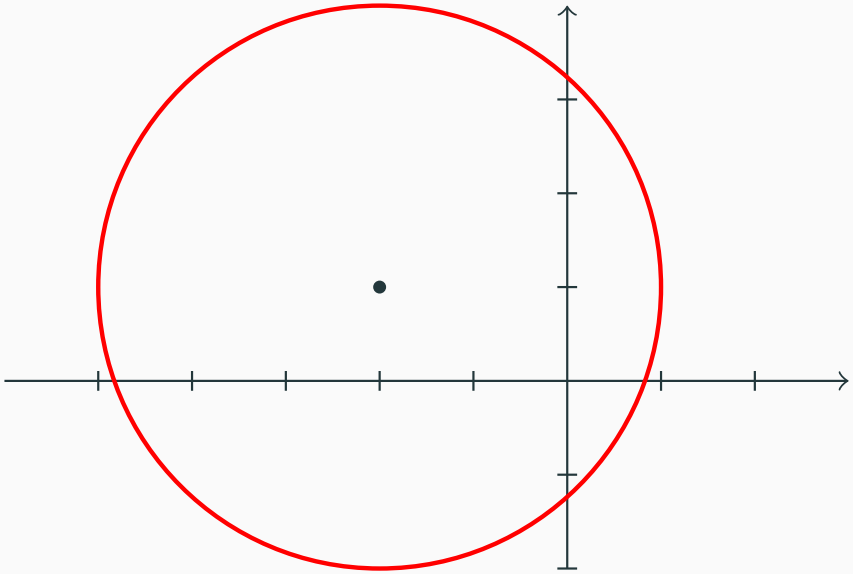


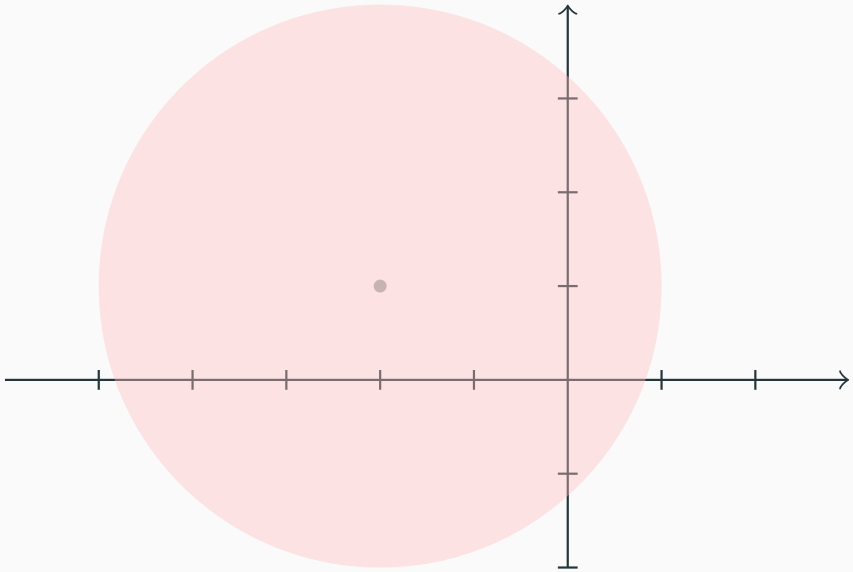
$$|z - u|$$

a z és u távolsága

P Mit alkotnak a komplex számsíkon azok a z számok (azaz mi a mértani helyük azoknak a z számoknak), amelyek kielégítik a $|z+2-i| = 3$ egyenletet, illetve a $|z+2-i| < 3$ egyenlőtlenséget.

m $3 = |z+2-i| = |z-(-2+i)|$, azaz z és $-2+i$ távolsága mindig 3. Ez éppen a $-2+i$ (azaz $(-2,1)$) körüli 3 sugarú körvonal. Az egyenlőtlenséget kielégítő z számok mértani helye ennek a körnek a belseje, a határvonal nélkül.





F Határozzuk meg azoknak a z komplex számoknak a mértani helyét, amelyek kielégítik az alábbi egyenletet, illetve egyenlőtlenséget!

a) $|z - i| = |z + i|$ b) $z + \bar{z} < 4$

m a) *Geometriai megoldás:*

$|z - i| = |z + i| \Leftrightarrow$

z egyenlő távolságra van i-től és $-i$-től $\Leftrightarrow$

z az i és $-i$ felező merőlegesén, azaz az x tengelyen van.

Tehát a mértani hely az x tengely.

Algebrai megoldás:

$z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |z - i| &= |z + i| \\ |x + (y-1)i|^2 &= |x + (y+1)i|^2 \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 &= x^2 + y^2 + 2y + 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

b) *Algebrai megoldás:*

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &< 4 \\ x + yi + x - yi &< 4 \\ 2x &< 4 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

A mértani hely az $x = 2$ által határolt bal oldali nyílt félsík.

Számolás algebrai alakban

F Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

$$(3-4i)(7+8i), \quad \frac{3-4i}{2-i}, \quad \overline{1+i}/1+i, \quad i^{199}, \quad (1+i)^9$$

P $(2+i)^{40} =$?? Túl bonyolult algebrai alakban kiszámítani.

Á $\mathbb{C}$-ben minden számnak van négyzetgyöke.

B Valósnak van: $0 < a \in \mathbb{R}$-re $(\pm\sqrt{a})^2 = a$ és $(\pm i\sqrt{a})^2 = -a$.

Adott $a + bi$ algebrai alakú komplex számra, ahol $b \neq 0$, keressünk $x, y \in \mathbb{R}$-et, hogy $(x+yi)^2 = a + bi$.

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 & = & a \\ 2xy & = & b \end{cases}$$

Az $y = b/2x$ helyettesítéssel x^2-re olyan másodfokú egyenletet kapunk, amelynek pontosan egy pozitív valós gyöke van, így két megoldást kapunk x-re, és ebből az eredeti egyenletre is.

K $\mathbb{C}$-ben minden másodfokú egyenletnek van megoldása, ugyanis a megoldóképlet ugyanúgy működik itt is.

T **Az algebra alaptétele**

$\mathbb{C}$-ben minden legalább elsőfokú polinomnak van gyöke.

F Mik a $3+4i$ négyzetgyökei?

Mj $\mathbb{C}$-ben a négyzetgyök többértékű, nincs a valós $\sqrt{x}$ függvénynek szép kiterjesztése.

m $(x+yi)^2 = 3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 &= 3 \\ 2xy &= 4 \end{cases}$

$y = 2/x \rightsquigarrow x^2 - 4/x^2 = 3 \rightsquigarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \rightsquigarrow x^2 = 4$ vagy -1.

De $x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow x^2 \geqslant 0 \rightsquigarrow x^2 = 4 \rightsquigarrow$

$x = \pm 2$, $y = \pm 1 \rightsquigarrow x + yi = \pm(2+i)$.

F Oldjuk meg az $x^2 + 4ix + 2 = 0$ egyenletet!

m $x = \dfrac{-4i \pm \sqrt{-16-8}}{2} = -2i \pm \sqrt{-6} = -2i \pm \sqrt{6}i = (-2 \pm \sqrt{6})i.$

T **A konjugált tulajdonságai**

(1) $\overline{z+u} = \bar{z} + \bar{u}$ és $\overline{z-u} = \bar{z} - \bar{u}$

(2) $\overline{zu} = \bar{z}\bar{u}$

(3) $\overline{z/u} = \bar{z}/\bar{u}$

(4) $\bar{\bar{z}} = z$

B $z = a + bi$-re és $u = c + di$-re

(1): $\overline{z+u} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c) - (b+d)i =$
$(a - bi) + (c - di) = \bar{z} + \bar{u}$, és ugyanígy a különbség.

(2): $\overline{zu} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = (ac-bd) - (ad+bc)i =$
$(a - bi)(c - di) = \bar{z}\bar{u}$

(3): a (2)-ből: $\overline{(z/u)}\bar{u} = \overline{(z/u)u} = \bar{z}$.

(4) $\bar{\bar{z}} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$.

K $\overline{z^n} = (\bar{z})^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

T **Az abszolút érték tulajdonságai**

(1) $|\bar{z}| = |z|$

(2) $|zu| = |z||u|$

(3) $|z/u| = |z|/|u|$

(4) $|z+u| \leqslant |z| + |u|$ (háromszög-egyenlőtlenség)

B Mivel $|z| \geqslant 0$ valós szám, az egyenlő(tlen)ségeknek elég a négyzetét belátni. Használjuk, hogy $|z|^2 = z\bar{z}$.

(1) $|\bar{z}|^2 = \bar{z}z = z\bar{z} = |z|^2$

(2) $|zu|^2 = zu\overline{zu} = zu\bar{z}\bar{u} = z\bar{z}u\bar{u} = |z|^2|u|^2$

(3) A (2)-ből: $|z/u||u| = |(z/u)u| = |z|$

(4) Itt felhasználjuk, hogy $|\operatorname{Re}(a+bi)|^2 = a^2 \leqslant a^2 + b^2 = |a+bi|^2$.
$|z+u|^2 = (z+u)(\bar{z}+\bar{u}) = |z|^2 + |u|^2 + z\bar{u} + \bar{z}u$, és itt
$z\bar{u} + \bar{z}u = z\bar{u} + \overline{z\bar{u}} = 2\operatorname{Re}(z\bar{u}) \leq 2|\operatorname{Re}(z\bar{u})| \leq 2|z\bar{u}| = 2|z||u|$ az (1),(2) alapján. Tehát $|z+u|^2 \leqslant |z|^2 + |u|^2 + 2|z||u| = (|z| + |u|)^2$.

K $|z^n| = |z|^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

F Legyen $z = 1 + 3i$ és $u = 2 - i$. Számítsuk ki minél egyszerűbben az alábbi kifejezéseket!

a) $(z+i)\overline{(z+i)}$ b) $|2z - zu|$ c) $|u/z\bar{u}^3|$

m a) $(z+i)\overline{(z+i)} = |z+i|^2 = |1+4i|^2 = 17$

b) $|2z - zu| = |2-u||z| = |i||1+3i| = \sqrt{10}$

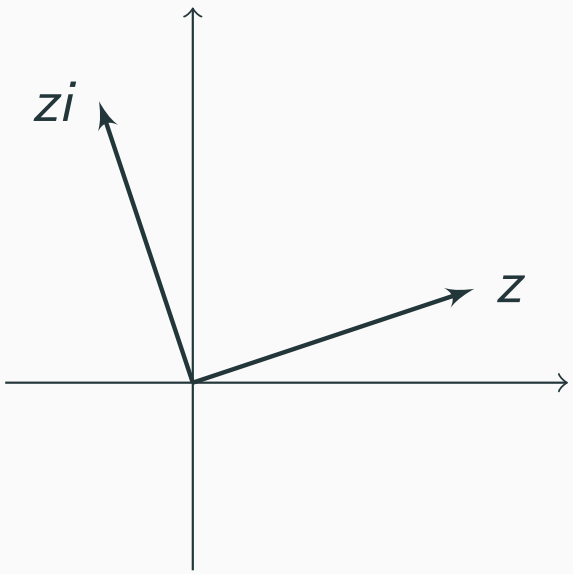
c) $|u/z\bar{u}^3| = |u|/(|z||u|^3) = 1/(|z||u|^2) = 1/(5\sqrt{10})$

Trigonometrikus alak

A szorzás geometriai jelentése

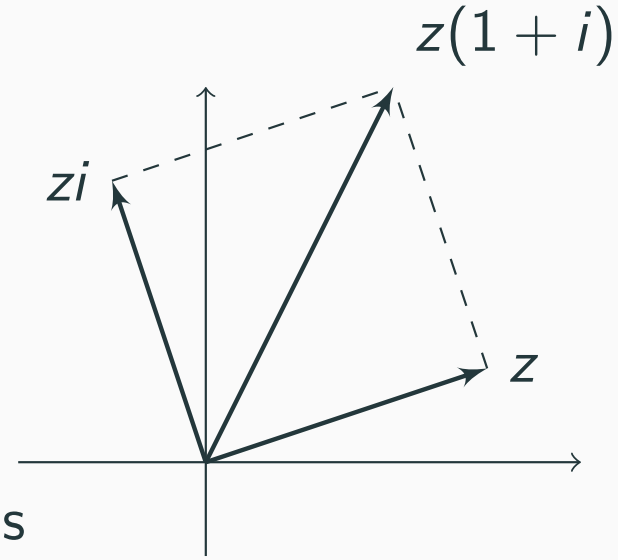
P1 i-vel való szorzás:

$$(x + yi)i = -y + xi$$
$$(x, y) \mapsto (-y, x)$$



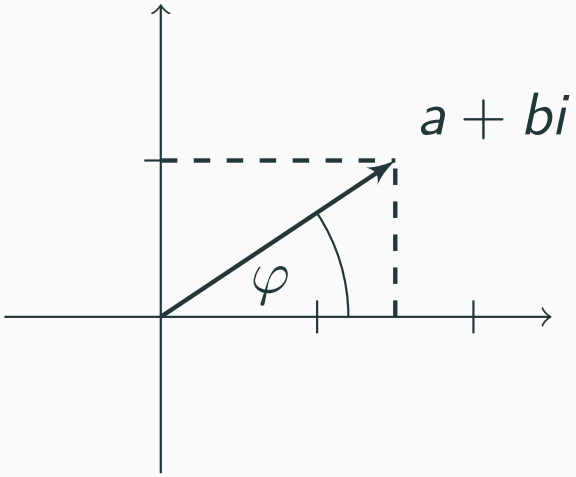
P2 $(1 + i)$-vel való szorzás:

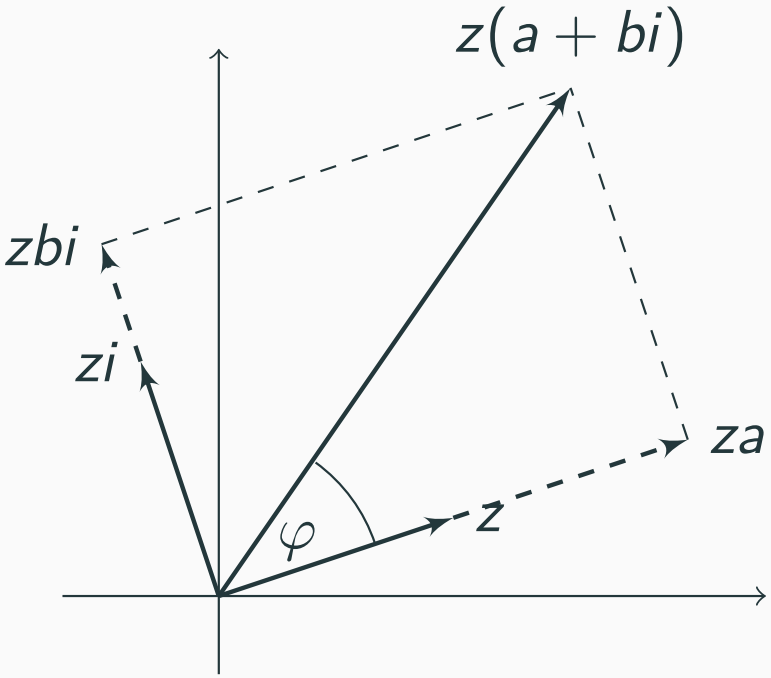
$$z \mapsto z(1 + i) = z + zi$$



$\sqrt{2}$ arányú 45°-os szögű forgatva nyújtás

P3 $(a+bi)$-vel való szorzás:





A két téglalap hasonló, de a második $|z|$-szer akkora:

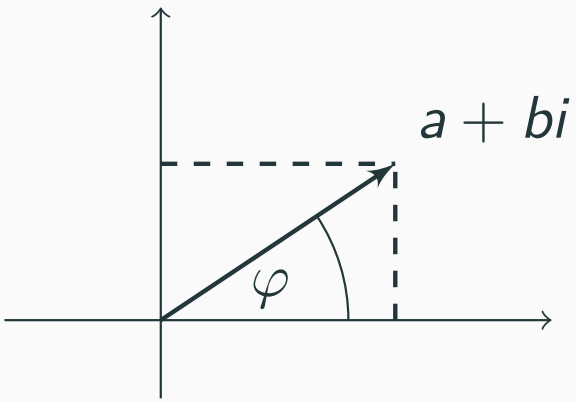
$|z(a+bi)| = |z||a+bi| = |z|\sqrt{a^2+b^2} \rightsquigarrow$

Az $(a+bi)$-vel való szorzás $\sqrt{a^2+b^2}$ arányú, φ szögű forgatva nyújtás.

Könnyebben leírható a szorzás, ha az $a+bi$ számot a helyvektorának x tengellyel bezárt szögével és a hosszával adjuk meg.

D **Definíció**

Az (a, b) vektornak a pozitív x-tengellyel bezárt szöge (az óramutató járásával ellentétes irányban mérve) legyen φ, hossza r. Ekkor a $z = a + ib = (r\cos\varphi) + i(r\sin\varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Az utóbbi a z komplex szám trigonometrikus alakja, ahol $r \geqslant 0$ és $\varphi \in \mathbb{R}$ tetszőleges. A szöget írhatjuk fokokban vagy radiánban is, és z szögének vagy argumentumának nevezzük.

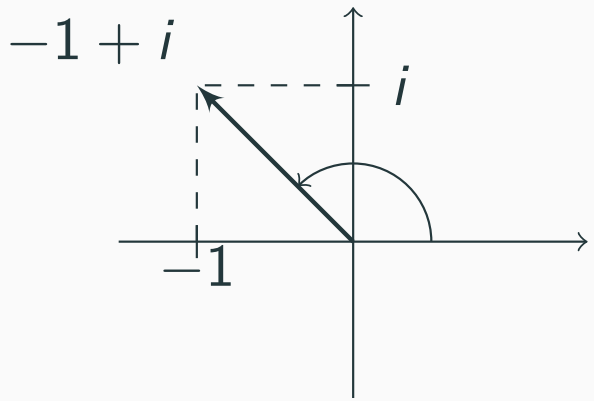


A trigonometrikus alak nem egyértelmű:

Á $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \Leftrightarrow$
$r_1 = r_2$ és $\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$-re.

P Mi a $-1+i$ trigonometrikus alakja?

m



$|-1+i| = \sqrt{2}$

szöge 135°, azaz $\frac{3\pi}{4}$

$-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$.

P Mi a $-2-i$ trigonometrikus alakja?

m $|-2-i| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \rightsquigarrow$

$-2-i = \sqrt{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i\right) = \sqrt{5}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.

Ezek egyike sem határozza meg teljesen a szöget, de a pontot tartalmazó síknegyeddel együtt már igen (ez esetben ez a harmadik negyed).

$\varphi = (\operatorname{arctg}\frac{1}{2}) + \pi$.

Trigonometrikus alak

Műveletek trigonometrikus alakban

$+$, $-$ műveletet nem lehet jól elvégezni trig. alakban

$\cdot$ műveletről láttuk:

$z \mapsto z \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ r arányú, φ szögű forgatva nyújtás $\rightsquigarrow$

z hossza r-rel szorzódik, és z szögéhez hozzáadódik φ

T **Tétel**

Legyen $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, és $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$ $(k = 1, 2)$. Ekkor

(1) $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

(2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$,

speciálisan $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$

(3) $\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$

(4) $|z| = r$

(5) $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$, ahol $n \in \mathbb{Z}$

B (1): Következik a szorzás geometriai jelentéséből.

(2): Az (1)-ből következik, z_2-vel való átszorzással.

A spec. eset az $1 = \cos 0 + i \sin 0$ trigonometrikus alakból adódik.

(3): $z \mapsto \bar{z}$ tükrözés az x tengelyre.

(4): ✓

(5): Pozitív n-re z^n az (1)-ből indukcióval, $z^{-n} = 1/z^n$ ebből és a (2) spec. esetéből. $z^0 = 1$, ha $z \neq 0$. ✓

P $(2 - 2\sqrt{3}i)^{15} = ?$

m $z = 2 - 2\sqrt{3}i$, $|z| = \sqrt{4 + 12} = 4$

$z = 4(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 4(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})) \rightsquigarrow$

$z^{15} = 4^{15}(\cos(-5\pi) + i \sin(-5\pi)) = 4^{15}(\cos \pi + i \sin \pi) = -4^{15}$.

Gyökvonás

T **Tétel**

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$-re és $n \in \mathbb{N}^+$-ra

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right),$$

ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

B Kell: $u = s(\cos\psi + i\sin\psi)$, amelyre $u^n = z$, azaz

$$s^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$s^n = r \quad \text{és} \quad n\psi = \varphi + 2k\pi \text{ vmely } k \in \mathbb{Z}\text{-re}$$

$$s = \sqrt[n]{r} \quad \text{és} \quad \psi = \tfrac{\varphi}{n} + k\cdot\tfrac{2\pi}{n}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$-re különböző pontokat kapunk, $k = n$-re már ugyanazt, mint $k = 0$-ra.

K Egy $z \neq 0$ komplex szám n-edik gyökei origó középpontú szabályos n-szöget alkotnak.

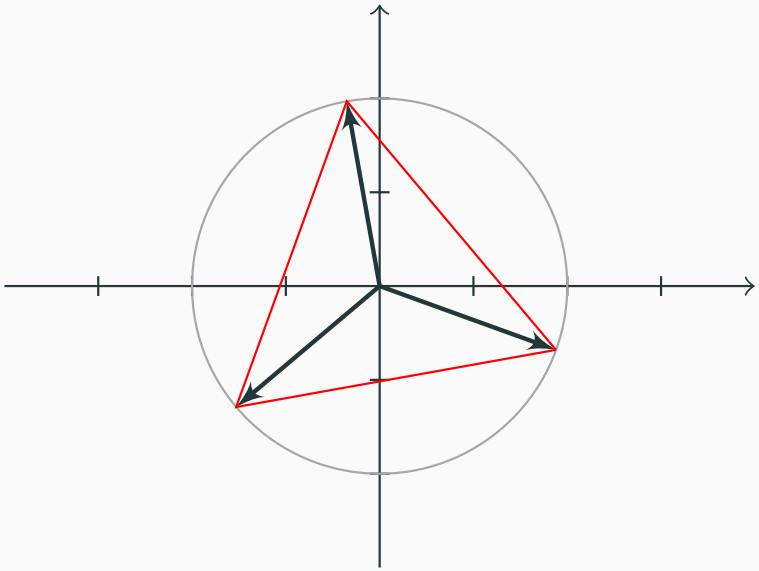
P $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}i}=?$

m $z=4-4\sqrt{3}i \rightsquigarrow |z|=8 \rightsquigarrow$

$z=8(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=8(\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)) \rightsquigarrow$

$\sqrt[3]{z}=2(\cos(-20^\circ+k\cdot 120^\circ)+i\sin(-20^\circ+k\cdot 120^\circ))$ $(k=0,1,2)$.

Tehát a köbgyökök az origó körüli 2 sugarú körön helyezkednek el egy szabályos háromszög csúcsaiban, szögeik -20°, 100° és 220°.



F Számítsuk ki és ábrázoljuk a komplex számsíkon $-4-4i$ összes ötödik gyökét!

Egységgyökök

D Az $\varepsilon \in \mathbb{C}$ n-edik egységgyök ($n \in \mathbb{N}^+$), ha $\varepsilon^n = 1$.

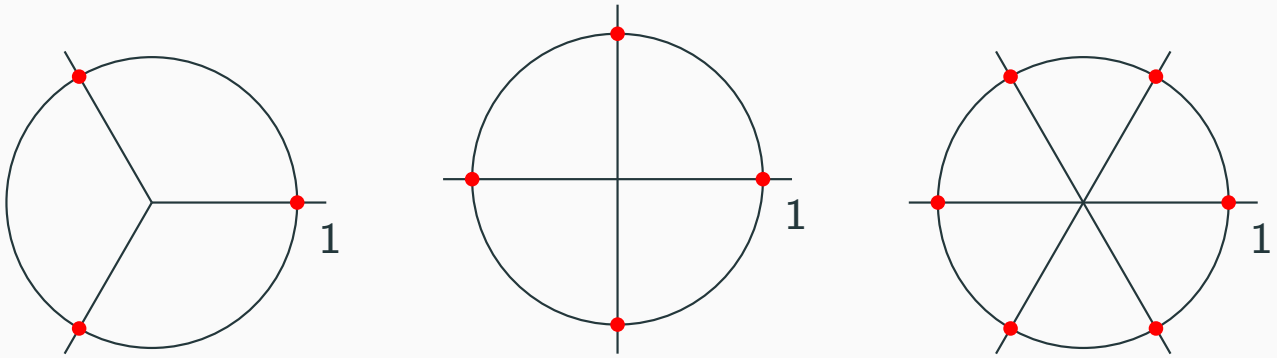
m Az n-edik egységgyökök: $\cos(k\frac{2\pi}{n}) + i\sin(k\frac{2\pi}{n}) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$

2-dik egységgyökök: 1, -1.

3-dik egységgyökök: 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

4-dik egységgyökök: 1, i, -1, $-i$.

6-dik egységgyökök: 1, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, -1, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.



A második egységgyökök egyúttal negyedik és hatodik, a harmadik egységgyökök egyúttal hatodik egységgyökök is.

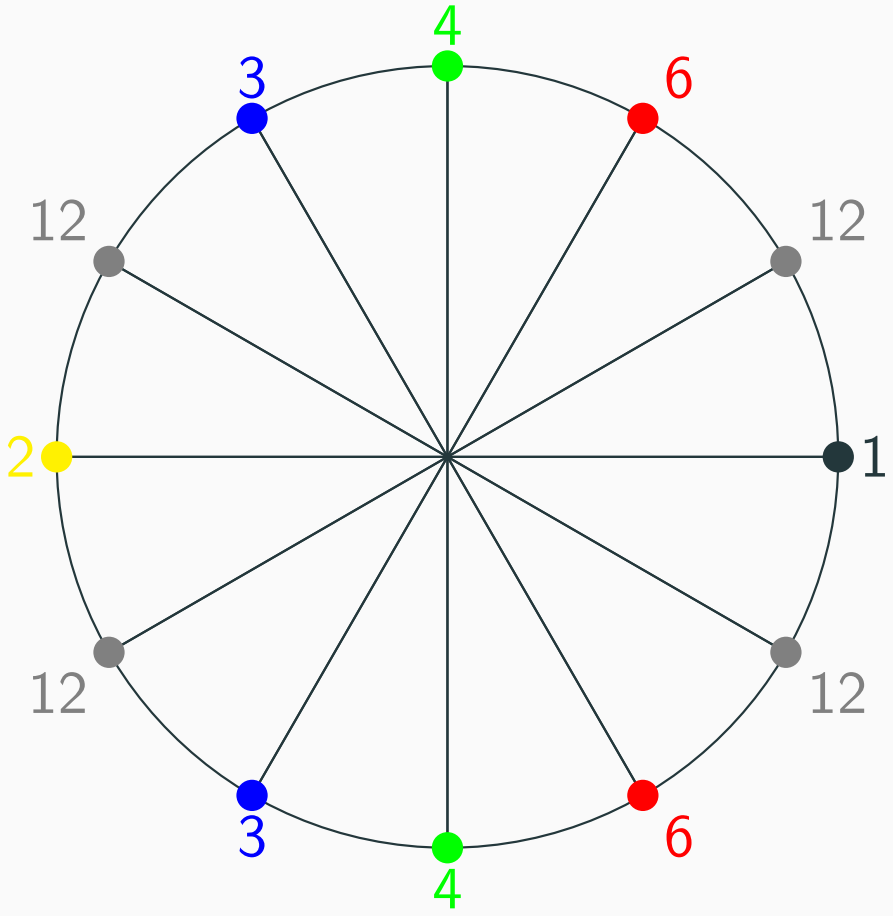
Mj Ha u a z egyik n-edik gyöke, akkor z összes n-edik gyökét megkapjuk $u\varepsilon$ alakban, ahol ε valamelyik n-edik egységgyök.

P Adjuk meg $32i$ összes 5-ödik gyökét!

m Egyet ránézésre is találunk: $i^4 = 1 \rightsquigarrow (2i)^5 = 32i$, a többit meg megkapjuk az $\varepsilon = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ egységgyök hatványaival való szorzással (vagy másképpen, a 72° egész számú többszöröseit adva a $2i = 2(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$ szögéhez.

Tehát az ötödik gyökök $2(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, ahol $\varphi = 90^\circ, 162^\circ, 234^\circ, 306^\circ, 18^\circ$.

F Rajzoljuk fel az 1 összes 12-edik gyökét a komplex számsíkon. Melyiknek hányadik a legkisebb hatványa, ami 1-et ad?



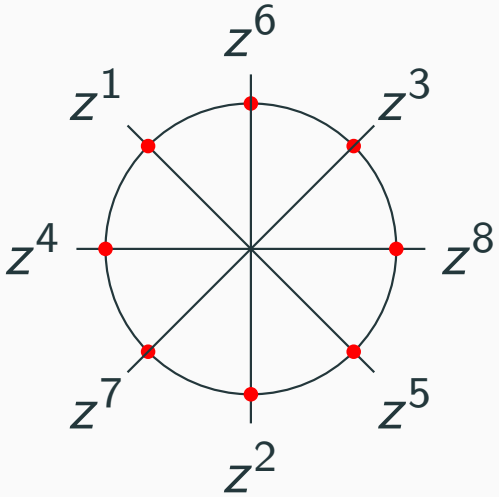
D $\varepsilon \in \mathbb{C}$ (multiplikatív) rendje az a legkisebb $n \in \mathbb{N}^+$, melyre $\varepsilon^n = 1$. Ha ilyen n nincs, akkor ε rendje ∞.

ε primitív n-edik egységgyök, ha rendje n.

P Mennyi $-1+i$ és $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ rendje?

M $-1+i$ rendje ∞, mivel $|-1+i| > 1$, tehát minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra $|(-1+i)^n| = |-1+i|^n > 1$.

$-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})$
$\rightsquigarrow$ a rendje 8.



F Igaz-e, hogy minden 1 abszolút értékű komplex szám egységgyök?

m Nem, ha $\alpha = 2\pi a$, ahol a irracionális, akkor nincs olyan $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \mathbb{Z}$, hogy $2\pi an = 2\pi k$.

Á Minden n-edik egységgyök rendje osztója n-nek.

B $\varepsilon^n = 1 \rightsquigarrow \varepsilon$ rendje véges. Ha ez $k < n$, akkor $n = kq + r$ ($q \geqslant 0$, $0 \leqslant r < k$).

$1 = \varepsilon^n = \varepsilon^{kq+r} = (\varepsilon^k)^q \varepsilon^r = 1^q \varepsilon^r = \varepsilon^r \rightsquigarrow r = 0 \rightsquigarrow k \mid n$.

Á $\varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$ egységgyök $\iff \alpha = 2\pi r$, ahol $r \in \mathbb{Q}$.

ε rendje $n \iff r$ egyszerűsített alakjának nevezője n.

B $\varepsilon^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = 1 = \cos 0 + i\sin 0 \iff n\alpha = 2k\pi$ vmely $k \in \mathbb{Z}$-re $\iff \alpha = 2\pi\frac{k}{n}$

- Ha $\frac{k}{n}$ egyszerűsíthető, akkor n-nél kisebb hatvány is 1.
- Ha nem egyszerűsíthető, azaz $(k, n) = 1$, akkor $\varepsilon^m = 1$ esetén $m\alpha = 2\pi m\frac{k}{n} \rightsquigarrow m \cdot \frac{k}{n} \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow n \mid mk \rightsquigarrow n \mid m \rightsquigarrow$ a rend n.

P Mi a rendje $\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$-nak?

m $\frac{5\pi}{6} = \frac{5}{12}2\pi \rightsquigarrow$ a rend 12.

F Ha ε rendje n, akkor mi lehet $-\varepsilon$ rendje?

T Legyen ε primitív n-edik egységgyök. Ekkor

(1) az n-edik egységgyökök: $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$,

(2) a primitív n-edik egységgyökök: $\{\varepsilon^\ell : 1 \leqslant \ell \leqslant n,\ (\ell, n) = 1\}$, és ezek száma $\varphi(n)$.

B (1): az $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$ mindegyike n-edik egységgyök, másrészt mind különbözők, mert $\varepsilon^k = \varepsilon^j$ és $k \geqslant j$ esetén $\varepsilon^{k-j} = 1$, $0 \leqslant k - j \leqslant n - 1 \rightsquigarrow k = j$.

(2): $\arg(\varepsilon) = 2\pi\frac{k}{n}$, $(k, n) = 1 \rightsquigarrow \arg(\varepsilon^\ell) = 2\pi\frac{\ell k}{n} \rightsquigarrow$ $\frac{\ell k}{n}$ nem egyszerűsíthető $\iff (\ell, n) = 1$.

K ε pontosan akkor primitív n-edik egységgyök, ha minden n-edik egységgyök előáll ε hatványaként.

T $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

B Minden n-edik egységgyök primitív d-edik egységgyök vmely $d \mid n$-re. Minden d-edik primitív egységgyök n-edik egységgyök, ha $d \mid n$, és ezek száma $\varphi(d)$.

P Mennyi az n-edik egységgyökök összege és szorzata?

m $1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^{n-1}=\dfrac{\varepsilon^n-1}{\varepsilon-1}=\dfrac{1-1}{\varepsilon-1}=0$, ha $n>1$

és az összeg $=1$, ha $n=1$.

$1\cdot\varepsilon\cdot\ldots\cdot\varepsilon^{n-1}==\varepsilon^{0+1+2+\ldots+(n-1)}=\varepsilon^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$2\nmid n$: $(\varepsilon^n)^{\frac{n-1}{2}}=1$

$2\mid n$: $(\varepsilon^{\frac{n}{2}})^{n-1}=(-1)^{n-1}=-1$, mert $(\varepsilon^{\frac{n}{2}})^2=1$, de $\varepsilon^{\frac{n}{2}}\neq 1\rightsquigarrow$ $\varepsilon^{\frac{n}{2}}=-1$.

Tehát $1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^{n-1}=\begin{cases}0, & \text{ha } n>1,\\ 1, & \text{ha } n=1,\end{cases}$

$1\cdot\varepsilon\cdot\ldots\cdot\varepsilon^{n-1}=\begin{cases}1, & \text{ha } 2\nmid n,\\ -1, & \text{ha } 2\mid n.\end{cases}$

Alkalmazások

Alkalmazások

Komplex számok a geometriában

Vektorok összeadását és kivonását komplex számokkal is kényelmesen ki tudjuk számolni. Emellett láttuk, hogy $\mathbb{C}$-ben a valós tengelyre való tükrözés leírható konjugálással, az origó körüli α szöggel való forgatás pedig a $(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ számmal való szorzással.

P Írjuk le komplex műveletekkel a következő transzformációkat $\mathbb{C}$-n:

a) Az y tengelyre való tükrözés

b) α szögű forgatás a $c \in \mathbb{C}$ szám körül

c) $60°$-os forgatás az $1 + i$ körül

d) Az utóbbi transzformációnál mi az i képe?

m a) $z \mapsto -\bar{z}$

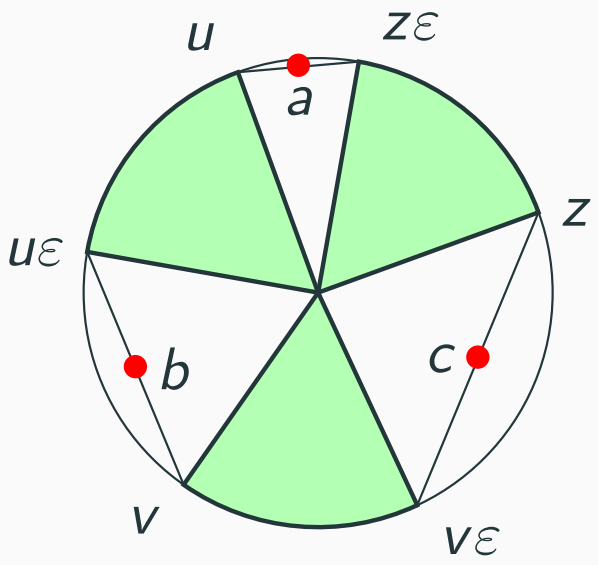
b) $z \mapsto (z - c)(\cos\alpha + i\sin\alpha) + c$

c) $z \mapsto (z - (1 + i))(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + 1 + i$

d) $i \mapsto \frac{1}{2} + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})i$

F Egy 6 darabos mackósajtos dobozban már csak három sajt van, amelyek lazán elfordultak a korong tengelye körül. Lássuk be, hogy a sajtok szomszédos külső (és felső) csúcsait összekötő szakaszok felezőpontjai mindenképpen szabályos háromszöget alkotnak.

m



$$\varepsilon = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ \rightsquigarrow \varepsilon^2 = \varepsilon - 1$$

$$c - b = \tfrac{1}{2}(z + v\varepsilon) - \tfrac{1}{2}(v + u\varepsilon) =$$

$$-u\tfrac{1}{2}\varepsilon + v(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon) + z\tfrac{1}{2}$$

$$a - b = \tfrac{1}{2}(u + z\varepsilon) - \tfrac{1}{2}(v + u\varepsilon) =$$

$$u(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\varepsilon) - v\tfrac{1}{2} + z\tfrac{1}{2}\varepsilon$$

$$(c-b)\varepsilon = -u\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 + v(-\tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) + z\tfrac{1}{2}\varepsilon =$$

$$u(-\tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}) - v\tfrac{1}{2} + z\tfrac{1}{2}\varepsilon \rightsquigarrow$$

$a - b = (c - b)\varepsilon$, azaz a háromszög b-ből a-ba mutató oldalvektora a b-ből és c-be mutató oldalvektor 60°-os elforgatottja, és ez pont azt jelenti, hogy a, b, c szabályos háromszöget alkotnak.

Alkalmazások

Binomiális összegképletek

D **Binomiális együttható**

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n,k \in \mathbb{N}_0,\ k \leqslant n.$$

egy n elemű halmazból kiválasztható k-elemű halmazok száma.

$k! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (k-1)\cdot k,\ \ 0! = 1,\ \ \binom{n}{k} = 0$, ha $k > n$.

Á A binomiális együttható alaptulajdonságai

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ és $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$
4. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Pascal-háromszög:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

T **Binomiális tétel**

Tetszőleges komplex a és b számokra és $n \in \mathbb{N}_0$ természetes számra

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Mj Mivel a bizonyítás csak az a és b közti összeadás és szorzás műveleti tulajdonságait használja, ezért a tétel bármely egységelemes kommutatív R gyűrű elemeire igaz. (Pl. $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$)

B Számítsuk ki, hogy az $(a+b)(a+b)\ldots(a+b)$ szorzatban mi $a^{n-k}b^k$ együtthatója!

Hányféleképp választható ki az n darab $(a+b)$ tényezőből k darab b és $n-k$ darab a?

Összesen $\binom{n}{k}$.

P $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

K $(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + + \ldots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$.

P $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$,

mert ez $(1+1)^n$ kifejtése a binomiális tétel szerint.

F $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots = ?$

m $(1-1)^n = 0^n = 0$.

K $\sum \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$, mert ez az előző kettő átlaga.

P $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots = ?$

m Vegyük észre, hogy

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} i - \binom{n}{2} - \binom{n}{3} i + \ldots,$$

tehát a keresett összeg éppen $\mathrm{Re}(1+i)^n$.

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \rightsquigarrow$$

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

Így az összeg $(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}$.

Az n modulo 8 maradékai szerint ez

$$\begin{cases} 2^{(n-1)/2} & \text{ha } n \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ -2^{(n-1)/2} & \text{ha } n \equiv \pm 3 \pmod 8 \\ 0 & \text{ha } n \equiv \pm 2 \pmod 8 \\ -2^{n/2} & \text{ha } n \equiv 4 \pmod 8 \\ 2^{n/2} & \text{ha } n \equiv 0 \pmod 8 \end{cases}$$