Bevezetés az algebrába 1

Polinomok gyökei

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Gyökök és gyöktényezők

T **Tétel**

Legyen R egységelemes kommutatív gyűrű, $f \in R[x]$.

(1) $c \in R$ gyöke f-nek $\Leftrightarrow (x - c) \mid f(x)$.

(2) Ha R 0-osztómentes is, és $c_1, \ldots, c_k$ különböző gyökei f-nek $\Rightarrow$ $(x - c_1) \cdots (x - c_k) \mid f(x)$

B (1): $f(x) = (x - c)h(x) + r_0$ maradékos osztás, $r_0 = f(c)$.
$(x - c) \mid f \Leftrightarrow r_0 = 0$.
(2): T.i. k-ra. (1) $\Rightarrow \exists g$: $f(x) = (x - c_1)g(x)$.
$\forall i > 1$: $0 = f(c_i) = (c_i - c_1)g(c_i)$, $c_i - c_1 \neq 0 \Rightarrow$
$\forall i > 1$: $g(c_i) = 0 \overset{\text{ind. felt.}}{\Longrightarrow} \exists h$: $g(x) = (x - c_2) \cdots (x - c_k)h(x)$

D Ha az R gyűrű fölötti $f \in R[x]$ polinomnak $c \in R$ gyöke, akkor az $x - c$ polinomot a $f(x)$ gyöktényezőjének, az $f(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$ alakú felírását (ha van) az f gyöktényezős felbontásának nevezzük.

K Ha R nullosztómentes, $\deg f = n$, akkor f-nek $\leqslant n$ különböző gyöke van $\mathbb{R}$-ben.

P Láttuk: $\mathbb{Z}_8[x]$-ben az $(x^2 - 1)$-nek 4 különböző gyöke is van. De $\mathbb{Z}_8$ nem nullosztómentes.

p Lehet n-nél kevesebb gyök is.
$x^3 - 1$-nek $\mathbb{R}$-ben csak 1 gyöke van (bár $\mathbb{C}$-ben 3).
$x^2 + 2x + 1$-nek $\mathbb{C}$-ben is csak a -1 a gyöke.

T **Az algebra alaptétele, 2. változat**

$f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f = n \geqslant 1 \implies f$-nek van gyötényezős felbontása $\mathbb{C}$ fölött: $c(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$.

B T.i. n-re. A tétel első alakja szerint $\exists g \in \mathbb{C}[x]$: $f(x) = (x - \alpha_1)g(x)$, és az ind. felt. miatt $g(x)$-nek van $g(x) = c(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$ gyöktényezős felbontása.
Az azonos gyökhöz tartozó gyöktényezőket összevonhatjuk:
$f(x) = c(x - \beta_1)^{k_1}(x - \beta_2)^{k_2} \cdots (x - \beta_r)^{k_r}$.

F Írjuk fel a következő polinomok gyöktényezős alakját $\mathbb{C}$ fölött!

a) $x^3 - 1$

b) $x^n + 1$

c) $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$

m a) $x^3 - 1$ gyökei a harmadik egységgyökök: $\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$, ahol $k = 0, 1, 2$, azaz $1,\ \ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, és így $x^3 - 1$ gyöktényezős felbontása

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x + \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

b) $x^n + 1$ gyökei a -1 szám n. gyökei, azaz $\cos\left(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, így

$$x^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x - \cos\tfrac{2k+1}{n}\pi - i\sin\tfrac{2k+1}{n}\pi\right)$$

Vagy másképp: $(x^n + 1)(x^n - 1) = x^{2n} - 1$, tehát $x^n + 1$ gyökei a $2n$-edik egységgyökök közül azok, amelyek nem n. egységgyökök, azaz egy ε primitív $2n$. egységgyök (pl. $\cos\frac{\pi}{n} + i\frac{\pi}{n}$) páratlanadik hatványai.

c) $(x^2-1)(x^8+x^6+x^4+x^2+1)=x^{10}-1$

(vagy a mértani sor összegképletéből
$f(x)=1+x^2+x^4+x^6+x^8=\frac{x^{10}-1}{x^2-1}$),

tehát az f polinom gyökei a ± 1-től különböző 10. egységgyökök, azaz
$\varepsilon=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$-re
$f(x)=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)(x-\varepsilon^4)(x-\varepsilon^6)(x-\varepsilon^7)(x-\varepsilon^8)(x-\varepsilon^9)$.

Többszörös gyökök

D R integritási tartomány, $f(x) \in R[x]$, $c \in R$

c (legalább) k-szoros gyöke f-nek, ha $(x-c)^k \mid f(x)$.

a c gyök multiplicitása f-ben k, ha $\exists g(x) \in R[x]$, hogy $f(x) = (x-c)^k g(x)$, és $g(c) \neq 0$.

c többszörös gyök, ha legalább kétszeres, azaz ha $(x-c)^2 \mid g(x)$.

Mj Ha $f(x) = c(x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_r)^{k_r}$, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ különbözők, akkor R nullosztómentessége miatt α_i pontosan k_i-szeres gyöke f-nek.

D Legyen K test, és $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in K[x]$. Az f polinom deriváltján az

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k x^{k-1} \in K[x]$$

polinomot értjük.

Á $'$: $K[x] \to K[x]$ tulajdonságai: Legyenek $f, g \in K[x]$ polinomok, $c \in K$ konstans polinom, $\alpha \in K$ testelem és $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor

(1) $c' = 0 \in K[x]$

(2) $(f+g)' = f' + g'$

(3) $(\alpha f)' = \alpha f'$

(4) $(fg)' = f'g + fg'$

(5) $((x-\alpha)^n)' = n(x-\alpha)^{n-1}$

B (1), (2), (3) nyilvánvaló a definícióból.

(4)-et a (2), (3) miatt elég x-hatványokra belátni.

$(x^m)'x^n + x^m(x^n)' = mx^{m-1}x^n + x^m nx^{n-1} = (m+n)x^{m+n-1} = (x^{m+n})'$

(5)-höz használhatjuk a binomiális tételt:

$$((x-\alpha)^n)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (-\alpha)^{n-k}\right)' = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}(-\alpha)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(-\alpha)^{n-k} = n(x-\alpha)^{n-1}$$

P $\mathbb{Z}_{11}$-ben: $(6x^8 + 5x^4 + 8x + 4)' = 4x^7 + 9x^3 + 8$.

T K test, $f(x) \in K[x]$, $c \in K$.

c többszörös gyöke f-nek $\Leftrightarrow f(c) = f'(c) = 0$.

B $(\Rightarrow)$ $f(x) = (x-c)^k g(x)$, ahol $k > 1 \rightsquigarrow$

$f'(x) = k(x-c)^{k-1}g(x) + (x-c)^k g'(x) \rightsquigarrow f'(c) = 0$

$(\Leftarrow)$ Legyen $f(c) = f'(c) = 0$.

c gyöke f-nek $\rightsquigarrow \exists g$: $f(x) = (x-c)g(x)$. Így

$f'(x) = g(x) + (x-c)g'(x) \rightsquigarrow 0 = f'(c) = g(c) \rightsquigarrow$

$\exists h$: $g(x) = (x-c)h(x)$, azaz $f(x) = (x-c)^2 h(x)$,

tehát c legalább kétszeres gyöke f-nek.

Mj A tétel bizonyításából látszik, hogy ha c az f polinom k-szoros gyöke, akkor f'-nek legalább $k-1$-szeres gyöke.

K Az $f \in K[x]$ polinom többszörös gyökei megegyeznek (f, f') gyökeivel.

P1 Van-e többszörös gyöke $f(x) = x^5 + 2x + 1$-nek $\mathbb{C}$-ben?

m $f'(x) = 5x^4 + 2$, és
$(x^5 + 2x + 1, 5x^4 + 2) = (x^5 + 2x + 1 - \frac{1}{5}x(5x^4 + 2), 5x^4 + 2) =$
$(\frac{8}{5}x + 1, 5x^4 + 2) = 1$, mert különben $\frac{8}{5}x + 1$ osztója lenne
$5x^4 + 2$-nek, de az utóbbinak nincs valós gyöke.

Tehát f-nek nincs többszörös gyöke.

P2 Van-e többszörös gyöke $f(x) = x^3 + 1$-nek $\mathbb{Z}_3[x]$-ben?

m $f'(x) = 3x^2 = 0$, tehát $(f', f) = f$, vagyis f minden gyöke többszörös.

Valójában $x^3 + 1 = (x + 1)^3$ a $\mathbb{Z}_3$ test fölött, tehát -1 háromszoros gyök.

Valós polinomok faktorizációja

T Ha az $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gyöke, akkor $\bar{\alpha}$ is gyöke, és a két gyök multiplicitása megegyezik.

B (A konjugált is gyök) $f(\alpha) = a_n\alpha^n + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$ $(a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}) \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} 0 = \bar{0} &= \bar{a}_n\overline{\alpha^n} + \ldots + \bar{a}_1\bar{\alpha} + \bar{a}_0 \qquad\qquad a_k \in \mathbb{R} \text{ így } \bar{a}_k = a_k \\ &= a_n\bar{\alpha}^n + \ldots + a_1\bar{\alpha} + a_0 \\ &= f(\bar{\alpha}) \end{aligned}$$

(Azonos a multiplicitás) f fokára vonatkozó teljes indukcióval.

$\deg f = 1$ vagy 2 esetén ✓

f-nek α és $\bar{\alpha}$ gyöke, azaz $f(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})g(x)$.

Mivel $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha} = x^2 - (2\operatorname{Re}\alpha)x + |\alpha|^2$ valós együtthatós, így g is valós együtthatós, melyben az indukciós feltevés szerint α és $\bar{\alpha}$ multiplicitása azonos. ✓

T **Valós irreducibilis polinomok**

$\mathbb{R}[x]$-ben irreducibilisek az elsőfokú polinomok és azok a másodfokúak, amelyeknek nincs valós gyökük.

B Ha egy $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ egy gyöke, akkor $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $x - \alpha$ osztója, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ esetén $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) \in \mathbb{R}[x]$ osztója $f(x)$-nek.

K *Minden n-edfokú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom felírható*

$$f(x) = a_n \prod_{j=1}^{r} (x - \alpha_j) \prod_{k=1}^{s} (x^2 + b_k x + c_k)$$

alakban, ahol $n = r + 2s$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ és $x^2 + b_k x + c_k$ irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött (azaz negatív diszkriminánsú).

P $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)^2$

F Adjunk meg olyan minimális fokú polinomot $\mathbb{C}$, illetve $\mathbb{R}$ fölött, amelynek az i kétszeres, az 1 háromszoros gyöke.

m $(x-i)^2(x-1)^3$, illetve $(x-i)^2(x+i)^2(x-1)^3 = (x^2+1)^2(x-1)^3$

P Írjuk fel az $f(x) = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$ polinomot irreducibilis valós polinomok szorzataként.

m Tekintsük az f korábban kiszámított gyöktényezős felbontását $\mathbb{C}$ fölött:

$$f(x) = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)(x-\varepsilon^4)(x-\varepsilon^6)(x-\varepsilon^7)(x-\varepsilon^8)(x-\varepsilon^9)$$

Mivel egy 1 abszolút értékű komplex szám konjugáltja megegyezik az inverzével, itt ε^k-t ε^{10-k}-nal kell párosítanunk, és ebből

$$f(x) = \prod_{k=1}^{4}(x-\varepsilon^k)(x-\bar{\varepsilon}^k) = \prod_{k=1}^{4}(x^2 - 2(\operatorname{Re}\varepsilon^k)x + 1) =$$
$$(x^2 - 2(\cos\tfrac{\pi}{5})x + 1)(x^2 - 2(\cos\tfrac{2\pi}{5})x + 1)\cdot$$
$$(x^2 - 2(\cos\tfrac{3\pi}{5})x + 1)(x^2 - 2(\cos\tfrac{4\pi}{5})x + 1)$$

Racionális polinomok gyökei

Hogyan ellenőrizzük, hogy egy racionális együtthatós polinomnak van-e gyöke $\mathbb{Q}$-ban? Mivel minden $\mathbb{Q}[x]$-beli polinom felszorozható $\mathbb{Z}[x]$-belivé, elég az egész együtthatós polinomok racionális gyökeit megkeresni.

T **Racionális gyökteszt (Rolle-tétel)**

Ha egy $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomnak egy $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ szám gyöke, ahol $(p, q) = 1$, akkor

$$p \mid a_0, \quad q \mid a_n,$$

azaz a számláló a konstans tagnak, a nevező a főegyütthatónak osztója.

B $0 = f(\frac{p}{q}) = a_n(\frac{p}{q})^n + \ldots + a_1(\frac{p}{q}) + a_0 \rightsquigarrow$

$0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n \rightsquigarrow$

$q \mid a_n p^n \rightsquigarrow q \mid a_n$ (mivel $(p, q) = 1$)

$p \mid a_0 q^n \rightsquigarrow p \mid a_0$ (mivel $(p, q) = 1$)

K *Ha $f \in \mathbb{Z}[x]$ főegyütthatója 1, akkor f racionális gyökei egész számok, és osztói a konstans tagnak.*

m A racionális gyökteszt nem dönti el, hogy van-e racionális gyöke a polinomnak, de véges sok racionális számra korlátozza a keresést. Ezeket Horner-módszerrel ellenőrizhetjük.

P Keressük meg a $2x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 17x - 6$ polinom racionális gyökeit!

M A szóba jöhető gyökök: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$.

Horner-elrendezéssel próbálkozunk:

	2	−5	−8	17	−6		
1	2	−3	−11	6	0	✓	A hányadosnak nem gyöke az 1
−1	~~2~~	~~−5~~	~~−6~~	~~12~~	!!		
2	~~2~~	~~1~~	~~−9~~	~~−12~~	!!		
−2	2	−7	3	0	✓		Nincs több negatív gyök.
$\frac{1}{2}$	2	−6	0	✓			A hányados már elsőfokú.

A !!-es sorokban nem találtunk gyököt, ezeket töröljük.

$2x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 17x - 6 = (x-1)(x+2)(2x-1)(x-3)$

Gyökök és együtthatók

T **Viète-formulák**

Ha egy polinom felbontható gyöktényezők szorzatára $K[x]$-ben:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

akkor

$$\begin{aligned} -\frac{a_{n-1}}{a_n} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \\ \frac{a_{n-2}}{a_n} &= \alpha_1\alpha_2 + \ldots \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n \\ &\vdots \\ (-1)^n\frac{a_0}{a_n} &= \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \end{aligned}$$

azaz egy 1 főegyütthatós polinomban x^k együtthatójának $(-1)^{n-k}$-szorosát megkapjuk mint a különböző indexű gyökökből képezhető összes k-tagú szorzat összegét.

B Az x-hatványok együtthatóinak összehasonlításából.

F Mi az $f(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5$ polinom gyökeinek összege, szorzata? Mi a gyökök négyzetösszege? Bizonyítsuk be, hogy van nem valós gyöke! (Hány valós gyöke lehet?)

m Az egyszerűség kedvéért osszuk le a főegyütthatóval:
$x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$.
$e_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{1}{2}$, $\qquad e_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\frac{5}{2}$
$e_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \frac{3}{2} \rightsquigarrow$
$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = e_1^2 - 2e_2 = \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{3}{2} = -\frac{11}{4} \rightsquigarrow$ van nem valós gyök.

Ha csak nem valós gyök van, akkor a konjugált párok szorzata az abszolút értékük négyzete, tehát $e_4 > 0$ lenne.

Ebből következik, hogy van valós gyök is, de a nem valósak száma páros, tehát pontosan két valós gyöke van f-nek.

P Mennyi az n-edik egységgyökök összege, illetve szorzata?

m $x^n - 1$ gyökeinek összege $-x^{n-1}$ egyh-ja: 0 ha $n > 1$, 1, ha $n = 1$, szorzata $(-1)^n(-1) = (-1)^{n+1}$.

P Mennyi a primitív 15-ödik egységgyökök összege?

m Keressük meg azt az 1 főegyütthatós polinomot, amelynek a gyökei éppen a primitív 15. egységgyökök! Ez az úgynevezett körosztási polinom, $\Phi_{15}(x)$. Általában, az *n*. körosztási polinom

$\Phi_n(x) = \prod_{j=1}^{\varphi(n)} (x - \varepsilon_j)$, ahol $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ a primitív n. egységgyökök.

A $\Phi_{15}(x)$ gyöktényezői az $x^{15} - 1$ gyöktényezői közül azok, amelyek nem szerepelnek sem $x^3 - 1$-ben, sem $x^5 - 1$-ben. Ennek a kettőnek viszont $x - 1$ közös faktora.

Tehát $\Phi_{15} = \dfrac{x^{15} - 1}{(x^5 - 1)(x^3 - 1)/(x - 1)} = \dfrac{x^{10} + x^5 + 1}{x^2 + x + 1} =$
$x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1.$

Tehát a primitív 15. egységgyökök összege 1.

(Mellesleg ehhez elég a hányados első két tagját kiszámolni.)

Harmadfokú egyenlet megoldása

m Az $x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}$ polinom

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)\left(x + \frac{a}{3}\right) + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right)$$

alakra hozása azt mutatja, hogy harmadfokú egyenlet gyökeinek meghatározásához elég az $x^3 + px + q$ alakúakat vizsgálni!

T **Cardano-képlet**

Az $x^3 + px + q = 0$ egyenlet megoldásait megkaphatjuk a következő alakban:

$$x = u + v, \text{ ahol } u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \text{ és } v = -\frac{p}{3u}$$

P Küszöböljük ki az x^2-es tagot a $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ polinomból!

m1 Az első két tag alapján $x + 1$ polinomjaként kell felírnunk a megadott polinomot!

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 7x - 13 \\ &= (x+1)^3 - 7(x+1) - 6 = y^3 - 7y - 6 \end{aligned}$$

m2 $(x + 1)$-gyel való ismételt maradékos osztással:

	1	3	−4	−12	
−1	1	2	−6	**−6**	$(x^2 + 2x - 6)(x + 1) - 6$
−1	1	1	**−7**		$(x + 1)(x + 1) - 7$
−1	1	**0**			$1(x + 1) + 0$
−1	**1**				$0(x + 1) + 1$

Tehát a polinom: $(x + 1)^3 - 7(x + 1) - 6 = y^3 - 7y - 6$, a helyettesítés $x = y - 1$.

B Keressük az $x^3 + px + q$ gyökeit $x = u + v$ alakban.

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$
$$(u^3 + v^3) + (3uv + p)(u+v) + q = 0$$

- Ha találunk olyan u, v párt, melyre $u^3 + v^3 + q = 0$ és $3uv + p = 0$, akkor találtunk egy gyököt! Ez u^3-re és v^3-re a következő egyenletrendszer megoldását kívánja:

$$u^3 v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3 \tag{1}$$
$$u^3 + v^3 = -q \tag{2}$$

- A gyökök és együtthatók összefüggése szerint u^3 és v^3 a $z^2 + qz - (\frac{p}{3})^3$ polinom gyökei, azaz $u^3, v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$.

- Már csak ebből a két számból kell köbgyököt vonni:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

  Kérdés, hogy a 3-3 gyök alkotta 9 párból melyek összege lesz valóban gyöke a polinomnak, és megkajuk-e így az összes gyököt?
- Az (1) egyenlet helyett az eredeti $uv = -\frac{p}{3}$ összepárosítja u és v lehetséges értékeit, azaz így valóban 3 $\{u, v\}$ párt kapunk.
- Behelyettesítés igazolja, hogy ha $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ primitív harmadik egységgyök, $u + v$ gyök, akkor a három gyök:

$$x_1 = u + v$$

$$x_2 = u\varepsilon + v\varepsilon^2 = -\frac{1}{2}(u+v) + \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)i \quad (\text{ui. } u\varepsilon v\varepsilon^2 = uv = -\frac{p}{3})$$

$$x_3 = u\varepsilon^2 + v\varepsilon = -\frac{1}{2}(u+v) - \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)i \quad (\text{ui. } u\varepsilon^2 v\varepsilon = uv = -\frac{p}{3})$$

- Valóban, az $(x-(u+v))(x-(u\varepsilon+v\varepsilon^2))(x-(u\varepsilon^2+v\varepsilon))$ polinomban a Viète-formulák szerint x^2 együtthatója

  $-u(1+\varepsilon+\varepsilon^2)-v(1+\varepsilon+\varepsilon^2)=-u0-v0=0,$

  x együtthatója

  $(u+v)(u\varepsilon+v\varepsilon^2)+(u+v)(u\varepsilon^2+v\varepsilon)+(u\varepsilon+v\varepsilon^2)(u\varepsilon^2+v\varepsilon)=$
  $u^2(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+v^2(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+uv3(\varepsilon+\varepsilon^2)=3uv(-1)=p,$

  és a konstans tag

  $-(u+v)(u\varepsilon+v\varepsilon^2)(u\varepsilon^2+v\varepsilon)=-(u^3\varepsilon^3+u^2v(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+$
  $uv^2(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+v^3\varepsilon^3)=-(u^3+v^3)=q.$

Mj Tegyük fel, hogy $f(x) = x^3 + px + q \in \mathbb{R}[x]$. Kiszámolható, hogy az $f(x) = 0$ egyenlet $D = (\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3$ diszkriminánsára

ha $D > 0$, akkor egy valós és két nem valós gyök van,

ha $D = 0$, akkor csupa valós gyök van, amelyek között van többszörös,

ha $D < 0$, akkor 3 különböző valós gyök van, viszont a kiszámolásukhoz nem valós számból kell köbgyököt vonni.

P Határozzuk meg az $x^3 + 6x^2 + 21x + 52$ polinom gyökeit!

m $y = x + 2$

	1	6	21	52
-2	1	4	13	**26**
-2	1	2	**9**	
-2	**1**	**0**		

$y^3 + 9y + 26$

$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-13 + \sqrt{13^2 + 3^3}} = \sqrt[3]{-13 + 14}$

Így $u = \sqrt[3]{1}$ választható 1-nek, és $v = \frac{-p/3}{u} = -3$

$y_1 = u + v = 1 - 3 = -2,$

$y_2 = u\varepsilon + v\varepsilon^2 = (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) - 3(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 + 2\sqrt{3}i$

$y_3 = 1 - 2\sqrt{3}i.$

Tehát $x_1 = -4$, $x_{2,3} = -1 \pm 2\sqrt{3}i$,

$x^3 + 6x^2 + 21x + 52 = (x + 4)(x + 1 + 2\sqrt{3}i)(x + 1 - 2\sqrt{3}i)$