Bevezetés az algebrába 1

Szimmetrikus polinomok

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Szimmetrikus polinomok

D Legyen R egy egységelemes, kommutatív gyűrű, és $x_1, x_2, \ldots, x_n$ egymástól különböző szimbólumok. A

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}, \quad (a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \in R,\ i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}_0)$$

alakú kifejezéseket R fölötti n-határozatlanú (n-változós) polinomnak nevezzük. Halmazukat $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jelöli.

Mj Legyen összevonva, ami összevonható: pl. $2x_1^3x_2^2 - 5x_1^3x_2^2 = -3x_1^3x_2^2$.

P $3x_1^3x_3 - x_2^2x_1^2 + 5x_2x_3 - 2x_3 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$

Mj Ez a fogalom rekurzív módon is definiálható. $R[x_1, x_2]$ nem más, mint az $R[x_1]$ gyűrű fölötti x_2 változójú polinomgyűrű: $R[x_1, x_2] = (R[x_1])[x_2]$. Általában $R[x_1, x_2, \ldots, x_n] = (R[x_1, \ldots, x_{n-1}])[x_n]$.

P $x^3y^2 + 3x^2y^2 - xy^3 + xy^2 + 2xy - y^2 + 7 \in \mathbb{Z}[x, y]$,
$(-x)y^3 + (x^3 + 3x^2 + x - 1)y^2 + (2x)y + 7 \in (\mathbb{Z}[x])[y]$

T Az $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ egységelemes, kommutatív gyűrű és egységei azok a konstans polinomok, ahol a konstans R-ben is egység. Ha R nullosztómentes, akkor $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ is az.

D Az $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}$ $(a \in R \setminus \{0\})$ tag foka $i_1 + i_2 + \dots + i_n$. A $p \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinom foka a p tagjai fokának maximuma.

P $\deg(x^3y^2 + 3x^2y^4 - xy + 1) = \max\{5, 6, 2, 0\} = 6$

D A $p \in R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinomot szimmetrikus polinomnak nevezzük, ha változóinak tetszőleges permutációja után p-vel egyenlő polinomot kapunk.

Mj Elég kikötni, hogy p nem változik, ha bármely két változóját kicseréljük, mert minden permutáció megkapható elemek cseréjével.

P Az $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 - 7x_1x_2x_3$ polinom szimmetrikus, de a $x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 - 7x_1x_2x_3$ polinom nem!

D A változók összes, k különböző tényezőből álló szorzatának összegeként kapott $e_k \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomot *k-adik elemi szimmetrikus polinomnak* nevezzük, azaz

$$e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}, \qquad \textit{speciálisan}$$

$$e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i,$$

$$e_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j,$$

$$\ldots$$

$$e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$$

P $e_1(x) = x$,
$e_1(x, y) = x + y$, $e_2(x, y) = xy$,
$e_1(x, y, z) = x + y + z$, $e_2(x, y, z) = xy + xz + yz$, $e_3(x, y, z) = xyz$.

Látni fogjuk, hogy minden szimmetrikus polinom felírható az elemi szimmetrikus polinomokból.

P Állítsuk elő a $p(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 \in K[x,y,z]$ szimmetrikus polinomot az $e_1 = x + y + z$, $e_2 = xy + xz + yz$ és $e_3 = xyz$ elemi szimmetrikus polinomok kifejezéseként!

m $e_1^3 = (x+y+z)^3 =$
$x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2z + 3xz^2 + 3y^2z + 3yz^2 + 6xyz.$

Másrészt $e_1e_2 = (x+y+z)(xy+xz+yz) =$
$x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz.$

Így $p(x) = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3xyz = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3.$

T **Szimmetrikus polinomok alaptétele**

Tekintsük a K test fölötti $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomgyűrűt. Minden szimmetrikus $p \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinom felírható az elemi szimmetrikus polinomok K fölötti polinomjaként, azaz létezik olyan $f \in K[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ polinom, hogy

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, e_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

K Ebből és a Viète-formulákból következik, hogy egy $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinom gyökeinek bármely szimmetrikus polinomját fel lehet írni az együtthatókból, a gyökök ismerete nélkül is.

P Ha az $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ polinom gyökei a, b, c, akkor mivel egyenlő $a^3 + b^3 + c^3$?

m $a + b + c = 4$, $ab + ac + bc = -3$, $abc = -2$, tehát a korábbi példából $a^3 + b^3 + c^3 = 4^3 - 3 \cdot 4 \cdot (-3) + 3(-2) = 94$.

A tétel indukciós bizonyításához szükségünk lesz a többváltozós polinom tagjainak egy természetes rendezésére (melyik a főtag?). A tagokat „lexikografikusan” (abc-renben) fogjuk felírni: $xxxyy$, $xxyyyy$, xy.

D A p polinom tagjainak lexikografikus rendezésén tagjainak olyan sorrendbe való írását értjük, melyben

- $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n$
- $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n} \succ bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\dots x_n^{j_n}$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$), ha valamilyen $k \in \{1, 2, \dots n\}$ indexre $i_k > j_k$, de minden $m < k$ indexre $i_m = j_m$.

P $x_1^3 \succ x_1x_2^3x_3^2 \succ x_1x_2^2x_3 \succ x_2^3x_3 \succ x_2x_3^3$,

F Rendezzük lexikografikusan az $x_2^8x_3 - 7x_1^2x_3^7 + 3x_1^2x_3 + x_1^3x_2^2x_3 + 2x_1^3x_2^2 - 5x_1$ polinom tagjait!

m $x_1^3x_2^2x_3 + 2x_1^3x_2^2 - 7x_1^2x_3^7 + 3x_1^2x_3 - 5x_1 + x_2^8x_3$

D Egy többváltozós polinom főtagja a lexikografikus rendezés szerinti első tag.

Á R integritási tartomány fölötti többváltozós polinomok szorzatának főtagja a főtagok szorzata

B Ha f-nek és g-nek két olyan tagját szorozzuk össze, amelyek közül legalább az egyik nem főtag, és az x_i a legelső, amelynek a kitevője valamelyik tényezőben eltér a főtagbelitől, akkor ez a szorzat is x_{i-1}-ig megegyezik, x_i kitevőjében pedig kisebb lesz a főtagok szorzatánál.

B *(A tétel bizonyítása)* A legföljebb $\deg p$ fokú monomok (tehát egy véges halmaz) lexikografikus rendezése szerinti indukcióval bizonyítunk. Konstans polinomra az állítás igaz.

- Az

$$e_1^{k_1} \dots e_n^{k_n} = (x_1+x_2+\dots+x_n)^{k_1}(x_1x_2+\dots+x_{n-1}x_n)^{k_2} \dots (x_1x_2\dots x_n)^{k_n}$$

polinom főtagja a főtagok szorzata: $x_1^{k_1+k_2+\dots+k_n} x_2^{k_2+\dots+k_n} \dots x_n^{k_n}$.

- Másrészt ha a szimmetrikus p polinom főtagja $cx_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}$, akkor $i_1 \geqslant i_2 \geqslant \dots \geqslant i_n$, ugyanis $i_j < i_{j+1}$ esetén az a tag, amelyet x_{i_j} és $x_{i_{j+1}}$ cseréjével kapunk, lexikografikusan nagyobb lenne.

- Mivel p főtagja és

$$c \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^{i_1 - i_2}(x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n)^{i_2 - i_3} \ldots (x_1x_2 \ldots x_n)^{i_n}$$

  főtagja megegyezik, ezért a $p(x) - ce_1^{k_1} \ldots e_n^{k_n}$ polinom főtagja a lexikografikus rendezés szerint kisebb, mint p főtagja, így az indukciós feltevés szerint ez a polinom már elemi szimmetrikus polinomok polinomja, s ezzel p is az. (Vegyük észre, hogy ennél a lépésnél nem nő a kapott polinom foka.)
- A bizonyítás konstruktív, az alkalmazott „főtag kiküszöbölési eljárás" a gyakorlatban is használható.

m egy másik módszer (mankó) arra, mi lesz a kivonandó elemi polinomok polinomja:

$x_1^6x_2^4x_3^3x_4$ (és van még x_5 is) $\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 & x_2 & x_2 & & \\ x_3 & x_3 & x_3 & & & \\ x_4 & & & & & \end{array}$$

oszloponként megszámolva a változókat: $e_4e_3^2e_2e_1^2$

D Egy szimmetrikus polinom homogén, ha tagjai egyetlen tagból kaphatók a változók permutálásával (például az elemi szimmetrikus polinomok is homogének).

P Melyik az az $f(x, y, z)$ homogén szimmetrikus polinom, amelynek tagja az y^3z^2? Mi a polinom főtagja? Állítsuk elő ezt a polinomot elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként!

m A polinomnak 6 tagja van: y helyébe háromféle, z helyébe már csak kétféle változót választhatunk.

$f(x, y, z) = y^3z^2 + y^3x^2 + x^3y^2 + x^3z^2 + z^3x^2 + z^3y^2 =$
$= x^3y^2 + x^3z^2 + x^2y^3 + x^2z^3 + y^3z^2 + y^2z^3$, főtagja x^3y^2.

$f(x, y, z) = (xy + xz + yz)(xy + xz + yz)(x + y + z)$
$-2(x^3yz + y^3xz + z^3xy) - 5(x^2y^2z + x^2z^2y + y^2z^2x) =$
$e_2^2e_1 - 2xyz(x^2 + y^2 + z^2) - 5xyz(xy + xz + yz) =$
$e_2^2e_1 - 2e_3(e_1^2 - 2e_2) - 5e_3e_2 = e_2^2e_1 - 2e_3e_1^2 - e_3e_2$.

F Legyen $f(x,y) = x^5 + 2x^4y + 3x^3y^2 + 3x^2y^3 + 2xy^4 + y^5$. Állítsuk elő elemi polinomok polinomjaként.

m Válasszuk külön a homogén részeket!

$(x^5 + y^5) + 2(x^4y + xy^4) + 3(x^3y^2 + x^2y^3) =$

$((x+y)^5 - 5(x^4y + xy^4) - 10(x^3y^2 + x^2y^3)) + 2(x^4y + xy^4) + 3(x^3y^2 + x^2y^3) =$

$e_1^5 - 3(x^4y + xy^4) - 7(x^3y^2 + x^2y^3) = e_1^5 - 3xy(x^3 + y^3) - 7(xy)^2(x+y) =$

$e_1^5 - 3e_2((x+y)^3 - 3(x^2y + xy^2)) - 7e_2^2e_1 = e_1^5 - 3e_2(e_1^3 - 3e_2e_1) - 7e_2^2e_1 =$

$e_1^5 - 3e_2e_1^3 + 2e_2^2e_1.$

P Legyen a, b, c az $x^3 - 2x^2 + 4x + 3$ polinom három gyöke. Adjunk meg olyan 1-főegyütthatós polinomot, melynek gyökei ab, ac, bc.

m A gyökök és együtthatók összefüggései szerint

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ ab + ac + bc &= 4 \\ abc &= -3 \end{aligned}$$

A gyökök és együtthatók kapcsolata a keresett $(x - ab)(x - ac)(x - bc)$ polinomra:

$$\begin{aligned} ab + ac + bc &= 4 \\ a^2bc + ab^2c + abc^2 &= abc(a + b + c) = -6 \\ (ab)(ac)(bc) &= (abc)^2 = 9 \end{aligned}$$

innen a keresett polinom: $x^3 - 4x^2 - 6x - 9$.