Bevezetés az algebrába 1
Lineáris egyenletrendszerek
Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Gauss-eliminació

D K test fölötti n-ismeretlenes (n-változós) lineáris egyenlet:

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, ahol $a_i, b \in K$ adottak.

Keressük az egyenletet kielégítő $(x_1, \ldots, x_n)$ n-eseket.

D K test fölötti lineáris n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \ldots + & a_{mn}x_n = & b_m, \end{array}$$

ahol $a_{ij}, b_i \in K$ adottak.

Keressük azokat az $(x_1, \ldots, x_n)$ n-eseket, amelyek mindegyik egyenletet kielégítik.

a_{ij}: együtthatók, b_i: konstansok, x_i: ismeretlenek/változók

D Ha mindegyik egyenlet konstans tagja 0, a lineáris egyenletrendszer homogén, egyébként inhomogén.

Hogyan próbálkozunk a megoldással?

Behelyettesítéssel:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 3x & + & 4y & = & 5 \\ & & 2y & = & 8 \quad \Rightarrow \quad y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \; 3x + 16 = 5 \; \Rightarrow \; x = -\tfrac{11}{3}$$

Átalakítással:

$$\begin{array}{rrcrcr} & 3x & + & 4y & = & 5 \\ -2\cdot & x & + & 2y & = & 8 \\ \hline & x & & & = & -11 \end{array}$$

Most már lehet behelyettesíteni.

D Két lineáris egyenletrendszer ekvivalens, ha ugyanazok az ismeretlenek, és ugyanaz az összes megoldásuk.

P $$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{r} x = -11 \\ x + 2y = 8 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{r} x = -11 \\ 2y = 19 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{r} x = -11 \\ y = \frac{19}{2} \end{array}\right\}$$

Milyen átalakításokat alkalmazhatunk?

- Felcserélhetünk két egyenletet.
- Egyik egyenlet többszörösét hozzáadhatjuk a másikhoz.
- Egyik egyenletet megszorozhatjuk egy nemnulla számmal.

Ezek az elemi átalakítások.

Á Így valóban ekvivalens egyenletrendszert kapunk.

B Az eredeti egyenletrendszer megoldásai nyilván megoldásai az újnak.

Az új egyenletrendszer megoldásai is megoldásai a réginek, ui. elemi átalakítással vissza lehet kapni az eredetit.

P A $\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 5 \\ x + y &= 8 \end{aligned}\right\}$ egyenletrsz. együtthatóit a $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 8 \end{array}\right]$ mátrixszal tudjuk leírni, és az átalakításokat elég a mátrixon elvégezni.

D R gyűrű (többnyire test) fölötti $m \times n$-es mátrix:

m sorból és n oszlopból álló táblázat, elemei az R-ből valók.

$R^{m \times n}$ az R fölötti $m \times n$-es mátrixok halmaza.

A mátrixokat nagybetűkkel jelöljük: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & \dots & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Elemei: a_{ij} az i. sor j. eleme,

sorai: $A_{i*} := [a_{i1} \dots a_{in}]$

n-dimenziós sorvektor

$1 \times n$-es mátrix

oszlopai: $A_{*j} := \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

m-dimenziós oszlopvektor

$m \times 1$-es mátrix

P 2×3-as mátrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

D Elemi sorműveletek a $K^{m\times n}$ mátrixain, ahol K test:

1) két sor felcserélése: $s_i \leftrightarrow s_j$
2) egyik sor többszörösének hozzáadása egy másikhoz ($c \in K$-ra): $s_i \mapsto s_i + cs_j$
3) egyik sor megszorzása egy $c \neq 0$ elemmel: $s_i \mapsto cs_i$

D Az

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right\} \quad \text{egyenletrendszer}$$

mátrixa vagy együtthatómátrixa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

kibővített mátrixa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Á Ha egy egyenletrendszer kibővített mátrixán elemi sorműveleteket végzünk, ekvivalens egyenletrendszer kibővített mátrixát kapjuk.

B Az elemi sorműveletek a korábbi ekvivalens átalakításokat adják.

Egyenletrendszer megoldása Gauss-módszerrel:

Az egyenletrendszer kibővített mátrixát elemi sorműveletekkel "lépcsős" alakra hozzuk, és utána behelyettesítésekkel megoldjuk.

D **Lépcsős alak**

Egy mátrix lépcsős alakú, ha kielégíti a következő két feltételt:

- a csupa 0-ból álló sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;
- bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsó sor elején (legalább eggyel) több 0 van, mint a fölötte lévő sor elején.

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét vezérelemnek hívjuk. Egy vezérelem oszlopa bázisoszlop.

(ref: row echelon form)

P A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A következők nem: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- A Gauss-módszer, -kiküszöbölés vagy -elimináció: lineáris egyenletrendszer megoldása lépcsős alakra hozással (oszloponként haladva).

- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 3y + 3z &= 4 \\ x + 2y + z &= 5 \end{aligned} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{S_2-2S_1 \\ S_3-S_1 \\ S_4-S_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_4}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3-2S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{S_4+\frac{1}{3}S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 & x &= 1 \\ 2y + z &= 4 \longrightarrow & y &= 3 \quad \rightarrow (x, y, z) = (1, 3, -2) \\ 3z &= -6 & z &= -2 \end{aligned}$$

Végezhetünk egy lépésben több műveletet is akkor, ha ez ugyanazt adja, mintha egymás után végeznénk el ezeket (azaz ha a művelet visszafordítható).

Pl. ugyanazzal a sorral több sorban is nullázhatunk.

Á Elemi sorműveletekkel minden mátrix lépcsős alakra hozható.

B Az első olyan oszlopra, amelyben $\exists \neq 0$ elem:

- az első sorába hozunk egy $\neq 0$ elemet, ha nem ilyen volt ott (pl. sorcserével),
- és ezt használva kinullázzuk az alatta levő elemeket (az első sor alkalmas számszorosait hozzáadjuk az alatta levőkhöz)
- Ezután a mátrix 1. sor alatti részére ismételjük az eljárást.

A már rendbehozott oszlopok nem fognak elromlani, mert már csak olyan sorokkal dolgozunk, amelyeknek a kész oszlopokhoz tartozó részén csupa 0 van.

Egyszerűbb megoldani az egyenletrendszert (megspórolhatjuk a behelyettesítéseket), ha a mátrixot elemi sorműveletekkel "redukált lépcsős" alakra hozzuk.

D **Redukált lépcsős alak**

Egy mátrix redukált lépcsős alakú, ha

- lépcsős;
- minden vezérelem egyenlő 1-gyel (vezéregyes);
- a vezérelemek oszlopában a vezérelemeken kívül csak 0 van.

(rref: reduced row echelon form)

P A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Minden mátrixot redukált lépcsős alakra lehet hozni:

- lépcsős alakból: jobbról balra a vezérelemet 1-gyé tehetjük, ha a sorát leosztjuk vele, majd felfelé nullázhatunk;
- vagy: eleve fölfelé és lefelé is nullázunk a vezérelemekkel, amikor a mátrixot lépcsős alakra hozzuk.

P Hozzuk redukált lépcsős alakra a legutóbbi er. mátrixát, és úgy oldjuk meg az egyenletrendszert!

m

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}s_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[s_2-s_4]{s_1-2s_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}s_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{s_1-s_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & 3 \\ z & = & -2 \end{array}$$

F Hozzuk egyből redukált lépcsős alakra a következő kibővített mátrixot, és oldjuk meg az egyenletrendszert!

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[s_3 - 2s_1]{s_2 + s_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{s_2 \leftrightarrow s_3}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}s_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{s_1 + s_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}s_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[s_2 + \frac{1}{3}s_3]{s_1 - \frac{5}{3}s_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \implies \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= -1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

F Hozzuk redukált lépcsős alakra a következő kibővített mátrixot!

$$\left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Mi a hozzá tartozó egyenletrendszer megoldása?

Akármit is választunk x_3-nak, az első sorból x_1-et, a második sorból x_2-t, kifejezhetjük az egyenletek $x_1 = -1 - x_3$ és $x_2 = 2 + x_3$ alakja szerint.

Tehát az egyenletrendszernek végtelen sok különböző megoldása van, de ezeket felírhatjuk a következő alakban:

$$\begin{aligned} x &= -1 - t \\ y &= 2 + t \qquad (t \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges}) \\ z &= t \end{aligned}$$

D Lineáris egyenletrendszer lépcsős/redukált lépcsős alakú mátrixára:

szabad változó: amelynek megfelelő oszlopban nincs vezérelem

kötött változó: amelynek megfelelő oszlopban van vezérelem.

Egyenletrendszer megoldása a redukált lépcsős alakból (ha nincs benne $[0 \ldots 0 \mid c]$ $(c \neq 0)$ ellentmondásos sor):

A szabad változóknak tetszőleges értéket adunk, egymástól függetlenül (pl. különböző s, t, u paramétereket),

Minden nemnulla sor vezéreleméhez tartozó változót kifejezzük a szabad változókból (mivel a mátrix redukált lépcsős, csak a szabad változók osztlopaiban van még nemnulla szám).

Ezzel biztosítjuk, hogy a kapott értékek megoldásai legyenek az összes egyenletnek, más megoldás pedig nyilván nem létezhet.

F Írjuk fel az alábi er.-nek a megoldását (a változók x_1, x_2, x_3, x_4).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Szabad változók $x_2 = s$, $x_4 = t$,

ebből $x_1 = 1 - 2t$, $x_3 = 2 - 3t$.

$(s, t \in \mathbb{R}$ tetszőleges)

T (1) Egy mátrix redukált lépcsős alakja egyértelmű.

(2) A lépcsős alak nem egyértelmű, de a vezérelemek helye igen.

B Az (1)-et később bizonyítjuk.

(2) az (1)-ből következik, ugyanis a lépcsős alakból a redukált lépcsőst megkaphatjuk úgy, hogy a vezérelemek helye ne változzon.

D Egy lin. er. konzisztens, ha van megoldása ($\Leftrightarrow$ a lépcsős alakjában nincs ellentmondásos $[0 \dots 0 \mid c]$ ($c \neq 0$) sor).

Az er. inkonzisztens, ha nem konzisztens.

T **Tétel**

∞ elemszámú test fölött egy lineáris er.-nek csak 0, 1 vagy ∞ sok megoldása van. Ha a kibőv. mátrixának lépcsős alakjában

1) van $[0 \dots 0 \mid c]$ ($c \neq 0$) ellentmondásos sor, akkor nincs megoldás.
2) ha konzisztens, és nincs szabad változó, akkor 1 megoldás van.
3) ha konzisztens, és $\exists$ szabad változó, akkor ∞ sok megoldás van.

Á Ha K véges test, $|K| = q$, az egyenletrsz. konzisztens K fölött, és s szabad változója van, akkor a megoldások száma q^s.

B Mivel az s szabad változónak egymástól függetlenül q-féle értéke lehet, ez összesen $q \cdot q \cdots q = q^s$-féle lehetőség (a többi változót ezek már meghatározzák).

F Írjuk fel az következő er. összes megoldását $\mathbb{Z}_3$ fölött!

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 21 \end{array}$$

m

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x = -2t = t$, $y = t$, $z = 1$ ($t \in \mathbb{Z}_3$), azaz a megoldások $(1,1,1)$, $(2,2,1)$, $(0,0,1)$.

3 darab megoldás (3^1).

Vektorok

D K test, $K^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in K\}$ rendezett n-esek halmaza.

K^n elemei vektorok, K elemei skalárok.

A vektorokat sorvektorként: $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ vagy $[x_1 \ \ldots \ x_n]$

vagy oszlopvektorokként $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ írjuk.

Műveletek:

összeadás: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \ \ldots, \ u_n + v_n)$,

skalárral szorzás: $\lambda\mathbf{u} = (\lambda u_1, \ \ldots, \ \lambda u_n)$, ahol $\lambda \in K$.

(Ez megfelel az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$-beli vektorok geometriai összeadásának és skalárral szorzásának.)

Lineáris egyenletrsz. megoldása vektoros alakban

Ha az $[A \mid \mathbf{b}]$ kibővített mátrixú egyenletrendszer megoldható, és a szabad változókhoz a $t_1, \ldots, t_k$ paramétereket rendeltük, akkor

$\mathbf{x}$ felírható $\mathbf{x} = \mathbf{v}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + \ldots + t_k\mathbf{v}_k$ alakban valamely rögzített $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorokkal.

P Írjuk fel az $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ er. megoldását vektoros alakban.

m

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 3 + s - t \\ x_2 & = & s \\ x_3 & = & -1 - 2t \\ x_4 & = & t \end{array} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3+s-t \\ s \\ -1-2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektorterek és egyenletrendszerek

Vektorok műveleti tulajdonságai

(A1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(A2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(A3) $\exists \mathbf{0} : \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}\ \forall \mathbf{v}$

(A4) $\forall \mathbf{v}\ \exists (-\mathbf{v})\colon\ \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

(S1) $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$

(S2) $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$

(S3) $(\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v})$

(S4) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

ahol $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in K^n$, $\lambda, \mu \in K$.

Mj Tehát K^n az összeadásra nézve Abel-csoport (de nem gyűrű!).

Mj Még néhány hasznos tulajdonság:

$\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ vagy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

$-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$, és $\mathbf{u} - \mathbf{v} := \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

D **Vektorok lineáris kombinációja**

$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in K^n$ egy lineáris kombinációja $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k \in K^n$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$.

P K^n-ben minden vektor előáll $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ lineáris kombinációjaként:
$(c_1, \ldots, c_n) = c_1\mathbf{e}_1 + \ldots + c_n\mathbf{e}_n$.

D $\mathcal{V} \subseteq K^n$ altér K^n-ben (jele: $\mathcal{V} \leqslant K^n$), ha $\mathcal{V} \neq \emptyset$, és $\mathcal{V}$ zárt a műveletekre, azaz

$$\begin{aligned} \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{V} \\ \lambda \in K, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad &\Rightarrow \quad \lambda\mathbf{v} \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

K K^n egy nemüres részhalmaza altér $\Leftrightarrow$ zárt a lineáris kombinációkra

D $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in K^n$-re a $\mathbf{v}_i$-k által kifeszített (generált) altér a legkisebb olyan (tehát minden más ilyenben benne levő) altér, amely $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$-t tartalmazza:

$$\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\mathbf{v}_i \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K \right\}, \qquad \operatorname{span}\emptyset = \{\mathbf{0}\}.$$

P Mik az $\mathbb{R}^3$ alterei? Hány vektorral lehet ezeket generálni?

m Az $\mathbb{R}^3$ tér pontjait azonosíthatjuk a beléjük mutató helyvektorokkal, és így az altereket térbeli ponthalmazokkal.

Minden altérnek eleme a $\mathbf{0}$ vektor (mert $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}$).

$0 := \{\mathbf{0}\}$ (az origóból álló egypontú ponthalmaz) önmagában altér.

Ha $\mathcal{V} \leqslant \mathbb{R}^3$ altér, és van $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, akkor $\operatorname{span}(\mathbf{v}) = \{\lambda\mathbf{v}\} \subseteq \mathcal{V}$, és $\operatorname{span}(\mathbf{v})$ maga is altér. Az ehhez tartozó ponthalmaz egy origón átmenő egyenes.

Ha $\operatorname{span}(\mathbf{v})$ nem a teljes $\mathcal{V}$, akkor vegyünk egy $\mathbf{u} \in \mathcal{V} \setminus \operatorname{span}(\mathbf{v})$ vektort. Ekkor $\operatorname{span}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \subseteq \mathcal{V}$, és altér $\mathbb{R}^3$-ben. Két vektor lineáris kombinációi mint pontok egy origón átmenő síkot alkotnak.

Ha ezen a síkon kívül is van pontja $\mathcal{V}$-nek, akkor $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$.

Tehát $\mathbb{R}^3$ alterei az origó, az origón átmenő egyenesek és síkok, és a teljes tér. Ezek generálásához minimum $0, 1, 2$, illetve 3 vektor kell.

Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldáshalmaza

Egy lineáris egyenletrendszer homogén, ha minden konstans 0, azaz a kibővített mátrixa $[A \mid \mathbf{0}]$,

inhomogén, ha a kibővített mátrixa $[A \mid \mathbf{b}]$, ahol $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

T **Homogén lin. er. megoldástere**

$A \in K^{m \times n} \Rightarrow$ az $[A \mid \mathbf{0}]$ homogén er. megoldásainak halmaza altere K^n-nek.

B Legyen $\mathcal{V}$ a megoldások halmaza.

$\mathbf{0} \in \mathcal{V}$, mert $a_{i1}0 + \ldots + a_{in}0 = 0 \ \forall i$.

Ha $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ mo. $\Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{x}'$ is az:

$$\sum_j a_{ij}(x_j + x_j') = \sum_j a_{ij}x_j + \sum_j a_{ij}x_j' = 0 + 0 = 0$$

és $\lambda\mathbf{x}$ is az:

$$\sum_j a_{ij}(\lambda x_j) = \lambda \sum_j a_{ij}x_j = \lambda 0 = 0$$

D Az $[A \mid \mathbf{0}]$ er. megoldásterét az A nullterének is hívjuk, és $\mathcal{N}(A)$-val jelöljük.

D K^n affin altere: $\mathbf{a} + \mathcal{V} = \{\mathbf{a} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$ valamely $\mathbf{a} \in K^n$-re és $\mathcal{V} \leqslant K^n$ altérre.

P $\mathbb{R}^3$ affin alterei a pontok, egyenesek, síkok és $\mathbb{R}^3$ (nem kell az origót tartalmazniuk).

Á $U \subseteq K^n$ affin altér $\Leftrightarrow$ valamely/bármely $\mathbf{u}_0 \in U$-ra $U - \mathbf{u}_0 \leqslant K^n$.

B $(\Rightarrow)$: $U = \mathbf{a} + \mathcal{V}$, $\mathcal{V} \leqslant K^n$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{a} + \mathbf{v}_0$ tetsz. eleme U-nak $\Rightarrow$

$U - \mathbf{u}_0 = (\mathcal{V} + \mathbf{a}) - (\mathbf{a} + \mathbf{v}_0) = \mathcal{V} - \mathbf{v}_0 \overset{*}{=} \mathcal{V} \leqslant K^n$

$(*$: $\subseteq$: ✓ $\quad \supseteq$: $\mathbf{v} = (\mathbf{v} + \mathbf{v}_0) - \mathbf{v}_0 \in \mathcal{V} - \mathbf{v}_0$ $)$

$(\Leftarrow)$: $U = \mathbf{u}_0 + (U - \mathbf{u}_0)$, ahol $U - \mathbf{u}_0 \leqslant K^n$ a feltevés szerint.

T **Lin. er. megoldáshalmaza**

Tfh. $[A \mid \mathbf{b}]$ konzisztens, és $\mathbf{x}_0$ az egyik megoldása. Ekkor az er. megoldásainak a halmaza az $\mathbf{x}_0 + \mathcal{V}$ affin altér, ahol $\mathcal{V} = \mathcal{N}(A)$ az $[A \mid \mathbf{0}]$ homogén er. megoldástere.

B $\forall\ \mathbf{x}_0 + \mathbf{v} \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{V}$ megoldás:

$$\sum_j a_{ij}(x_{0j} + v_j) = \sum_j a_{ij}x_{0j} + \sum_j a_{ij}v_j = b_i + 0 = b_i \checkmark$$

$\forall$ megoldás $\mathbf{x}_0 + \mathcal{V}$-ben van:

Ha $\mathbf{x}$ megoldása $[A \mid \mathbf{b}]$-nek $\Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ mo.-a $[A \mid \mathbf{0}]$-nak:

$$\sum_j a_{ij}(x_j - x_{0j}) = \sum_j a_{ij}x_j - \sum_j a_{ij}x_{0j} = b_i - b_i = 0\ \forall i,$$

így $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{x}_0 + \mathcal{V}$.

D Egyetlen nemtriviális lin. egyenlet megoldáshalmaza hipersík K^n-ben:

$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}$, ahol $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$.

D Hipersík implicit egyenlete: $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$

Hipersík explicit (paraméteres) egyenlete: az $[a_1 \ldots a_n \mid b]$ megoldása paraméterekkel felírva.

P $\mathbb{R}^2$-ben a hipersíkok az egyenesek.

$\mathbb{R}^3$-ben a hipersíkok a síkok.

Az $x + 2y - z = 3$ implicit egyenletű sík:

$$[1\ 2\ -1 \mid 3] \qquad \left.\begin{array}{rcl} x & = & 3 - 2s + t \\ y & = & s \\ z & = & t \end{array}\right\} \text{explicit egyenletrendszer,}$$

illetve vektorosan: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t, s \in \mathbb{R})$

Lineáris egyenletrendszer sormodellje

Az egyenletrendszer megoldása az egyes egyenletek által definiált hipersíkok metszete.

P $\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 2 \end{array}$ síkok $\mathbb{R}^3$-ben. Mi a metszetük?

m

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

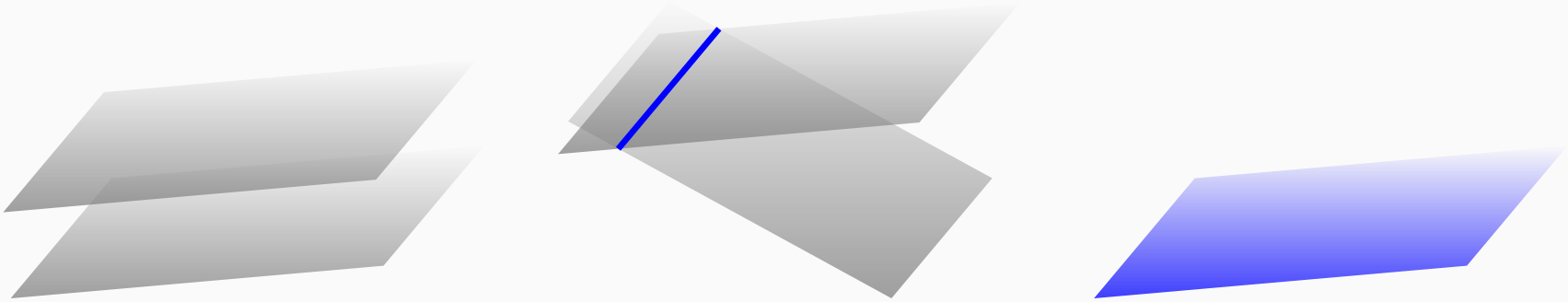
$$\begin{array}{rcr} x & = & 1+t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

P Mi lehet $\mathbb{R}^3$-ben két, illetve három sík metszete?

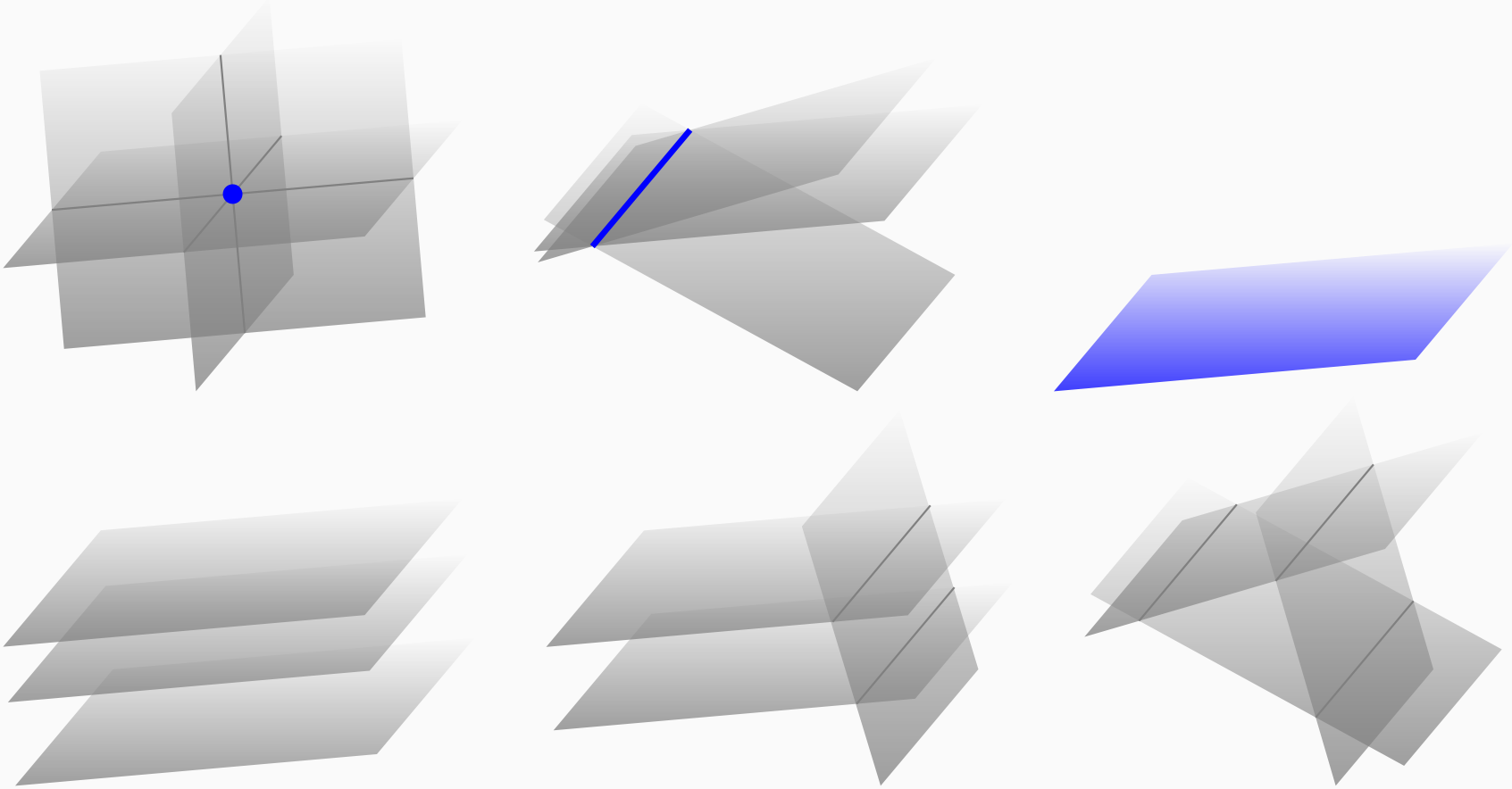
m Két sík metszete: üres, egyenes vagy sík.

Három síké: üres, pont, egyenes vagy sík.

Két sík metszete:



Három sík metszete:



D Egy $A \in K^{m \times n}$ mátrix oszloptere a K^m vektortérnek az A oszlopai által kifeszített altere. Jele: $\mathcal{O}(A)$.

Á **Oszlopmodell**

Az $[A \mid \mathbf{b}]$ kibővített mátrixú egyenletrendszer a következő vektoregyenlettel ekvivalens:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

E szerint a modell szerint egy egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előállítható az A oszlopainak lineáris kombinációjaként, azaz ha $\mathbf{b} \in \mathcal{O}(A)$. A megoldás pedig megadja a lehetséges előállítások együtthatóit.

Szimultán egyenletrendszerek

Ha több olyan egyenletrendszert szeretnénk megoldani, amelyben ugyanaz az együtthatómátrix, csak a konstans oszlop más (pl. több vektorról is szeretnénk eldönteni, hogy benne van-e egy altérben), akkor ezeket egyetlen Gauss-eliminációval is megoldhatjuk, a konstans oldalon több oszlopot egymás mellé írva.

$[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n \mid \mathbf{bc} \dots] \to\to \cdots [\mathbf{v}'_1 \dots \mathbf{v}'_n \mid \mathbf{b}'\mathbf{c}' \dots] \Rightarrow$

$[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n \mid \mathbf{b}]$ ekvivalens $[\mathbf{v}'_1 \dots \mathbf{v}'_n \mid \mathbf{b}']$-vel,

$[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n \mid \mathbf{c}]$ ekvivalens $[\mathbf{v}'_1 \dots \mathbf{v}'_n \mid \mathbf{c}']$-vel, ...

P Benne van-e a $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 0)$, illetve a $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 1)$ az $\mathbb{R}^4$-nek az $\mathbf{a} = (1, 0, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0, 1)$ és $\mathbf{c} = (0, 2, 1, 0)$ vektorok által kifeszített alterében?

m

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

A két egyenletrendszer redukált lépcsős alakja

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{és} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Ebből $\mathbf{v} = -\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$, viszont $\mathbf{w} \notin \operatorname{span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Ha megadunk egy alteret, szeretnénk azt minél kevesebb vektorral kifeszíteni, azaz a generáló vektorokból elhagyni a „fölöslegeseket”.

D **Lineáris függetlenség**

A $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in K^n$ vektorok lineárisan függetlenek (ftln), ha

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0,$$

azaz a vektoroknak csak a triviális lineáris kombinációja ad $\mathbf{0}$-t. Lineárisan összefüggők (öf.), ha nem függetlenek.

P $\mathbf{0}$ egymagában összefüggő, mert $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ nemtriviális lineáris kombináció.

P $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 1)$ ftln, mert ha $\lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 1, 1) = \mathbf{0}$, akkor $\lambda + 2\mu = 0$, $\mu = 0$ és $\lambda + \mu = 0$, így $\lambda = \mu = 0$.

Á (1) Egy $\mathbf{v}$ vektor ftln $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

(2) $k \geqslant 2$-re $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ ftln $\Leftrightarrow$ semelyik nem áll elő többi lineáris kombinációjaként.

B (1): Tudjuk, hogy $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ vagy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Tehát $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ftln, viszont láttuk, hogy $\mathbf{0}$ öf.

(2): Helyette: öf $\Leftrightarrow$ valamelyik előáll a többiből.

($\Rightarrow$): Ha $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, és pl. $\lambda_j \neq 0$, akkor $\mathbf{v}_j = \sum\limits_{i \neq j} -\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\mathbf{v}_i$.

($\Leftarrow$): Ha pl. $\mathbf{v}_j = \sum\limits_{i \neq j} \mu_i \mathbf{v}_i$, akkor

$-\mu_1\mathbf{v}_1 + \ldots + -\mu_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + 1\mathbf{v}_j - \mu_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} - \ldots - \mu_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$

nemtriviális kombináció, mert 1 is az együtthatók között van (még ha az összes μ_i nulla is lenne).

F Lineárisan függetlenek-e

a) $(1,1,0),(0,0,0)$;

b) $(1,2),(0,1),(-2,-4)$;

c) $(1,2,0),(0,1,-1),(1,1,1)$?

m a) Nem, mert $\mathbf{0}$ benne van, és $1\mathbf{0}=\mathbf{0}$ nemtriviális kombináció.

b) Nem, mert $(-2,-4)=-2(1,2)$

c) Legyen a három vektor $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$. Akkor ftln, ha a $[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 \mid \mathbf{0}]$ egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ennek a megoldása $x_1=-t$, $x_2=t$, $x_3=t$, tehát pl. $t=1$-re $-\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$ nemtriviális lineáris kombináció, tehát öf (vagy mert $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$).

Á Legyen $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k]$, azaz $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ az A oszlopai. Ekkor ekvivalens:

(i) $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ ftln

(ii) az $[A \mid \mathbf{0}]$ er-nek csak triviális ($\mathbf{0}$) megoldása van

(iii) A lépcsős alakjában minden oszlop bázisoszlop (azaz tartalmaz vezérelemet)

(iv) A redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \end{bmatrix}$$

B $(i) \Leftrightarrow (ii)$: a definícióból

$(ii) \Rightarrow (iii)$: $[A \mid \mathbf{0}] \to\to [L \mid \mathbf{0}]$-ban nincs szabad változó $\Rightarrow$ L minden oszlopában van vezérelem.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: A redukált lépcsős alakban is minden oszlop bázisoszlop, és itt a vezéregyes alatt és fölött is csak 0-k lehetnek.

$(iv) \Rightarrow (ii)$: $[A \mid \mathbf{0}] \to\to [L \mid \mathbf{0}]$, ahol L redukált lépcsős, és a (iv)-ben megadott alakú $\Rightarrow$ egyértelmű a megoldás.

Mj Egy homogén lin. er.-nél elég az együtthatómátrixot eliminálni, a konstans oszlop úgysem változik.

P $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$ ftln-e $\mathbb{R}^4$-ben?

m Elég a lépcsős alak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát függetlenek.

T **A redukált lépcsős alak egyértelműsége**

Egy test elemeiből képzett minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható. Ez az alak egyértelmű.

B Indirekt: R és S két redukált lépcsős alak. Válasszuk ki az első oszlopot, melyben különböznek, és az összes megelőző bázisoszlopot:

$$\hat{R} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{R} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\hat{S} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{S} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$

- Mivel oszlopok kihagyása nem változtat a sorekvivalencián, ezért az $\hat{R}$ és $\hat{S}$ mátrixok ekvivalensek, azaz a hozzájuk tartozó két egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása
- $\rightsquigarrow$ vagy minden $i = 1, \dots, k$ indexre $r_i = s_i$, vagy egyik egyenletrendszer sem oldható meg, tehát $\hat{R} = \hat{S}$, ellentmondás.

m $\mathrm{rref}(A)$ az a függvény, mely egy $m \times n$-es mátrixhoz a redukált lépcsős alakjából a zérussorok elhagyásával kapott mátrixot rendeli.

D Egy A mátrix i. oszlopát bázisoszlopnak hívjuk, ha (redukált) lépcsős alakjában az i. oszlop bázisoszlop.

Á (1) Egy $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k]$ mátrix i. oszlopa pontosan akkor bázisoszlop, ha $\mathbf{a}_i \notin \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1})$ (illetve $i = 1$ esetén, ha $\mathbf{a}_1 \neq 0$).

(2) Ha $\mathbf{a}_i$ nem bázisoszlop, és $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_j$ rendre a tőle balra levő bázisoszlopok, továbbá, ha $\operatorname{rref}(A)$ i. oszlopa $[r_1 \dots r_j\, 0 \dots]^T$, akkor $\mathbf{a}_i = r_1\mathbf{b}_1 + \dots + r_j\mathbf{b}_j$.

B (1) $\mathbf{a}_i$ bázisoszlop $\Leftrightarrow$ $[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1} \mid \mathbf{a}_i]$ lépcsős alakjában is lejjebb nyúlik az i. oszlop az előzőktől, vagyis amikor ez az egyenletrendszer inkonzisztens.

(2) A $[\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_j \mid \mathbf{a}_i]$ redukált lépcsős alakjából az oszlopmodellnek pontosan az $x_1 = r_1, \dots, x_j = r_j$ megoldása olvasható le.

K Az A oszlopterében a bázisoszlopok függetlenek, és kifeszítik az egész oszlopteret.

B Az, hogy függetlenek, következik a bázisoszlopokhoz tartozó redukált lépcsős alakból, a másik állítás pedig az előző állítás (2) részéből.