Bevezetés az algebrába 1

Vektorterek

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Vektortér bázisa és dimenziója

D Legyen X halmaz, és $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$, ahol $\mathcal{P}(X)$ az X hatványhalmazát, azaz összes részhalmazának halmazát jelöli.

$A \in \mathcal{H}$ maximális $\mathcal{H}$-ban, ha $A \subseteq B \in \mathcal{H} \Rightarrow A = B$.

$A \in \mathcal{H}$ legnagyobb $\mathcal{H}$-ban, ha $B \subseteq A \ \ \forall\, B \in \mathcal{H}$.

$A \in \mathcal{H}$ minimális $\mathcal{H}$-ban, ha $A \supseteq B \in \mathcal{H} \Rightarrow A = B$.

$A \in \mathcal{H}$ legkisebb $\mathcal{H}$-ban, ha $A \subseteq B \ \ \forall\, B \in \mathcal{H}$.

P1 $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \leqslant K^n$ a legkisebb altér, ami tartalmazza a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorokat, azaz ezt tartalmazza az összes ilyen altér

P2 Az $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ halmazban $\{(1,0),(0,1)\}$ és $\{(1,0),(1,1)\}$ is maximális független részhalmaz, de egyik sem legnagyobb: egymást sem tartalmazzák.

Legyen $\mathcal{V} \leqslant K^n$, $U \subseteq V$ (esetleg üres vagy ∞) részhalmaz.

D **Definíció**

$\operatorname{span}(U) = \bigcap_{U \subseteq \mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}} \mathcal{W}$

$(= \{U$ elemeiből készített véges lineáris kombinációk$\} \cup \{\mathbf{0}\})$

U generátorrendszere $\mathcal{V}$-nek, ha $\operatorname{span}(U) = \mathcal{V}$.

U független, ha $\mathbf{u} \notin \operatorname{span}(U \setminus \{\mathbf{u}\})$ minden $\mathbf{u} \in U$-ra.

K U független $\Leftrightarrow$ U minden véges részhalmaza független

(a korábbi, véges halmazokra vonatkozó definíció szerint)

Mj $\operatorname{span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$, $\emptyset$ független, $\mathbf{v}$ független $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

(ui. $\mathbf{v} \notin \operatorname{span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$)

D **Definíció**

U bázis, ha generátorrendszer és független.

Á Generátorrendszerek és független halmazok tulajdonságai

$U \subseteq W \subseteq \mathcal{V} \leqslant K^n$.

(1) U generátorrendszer $\Rightarrow$ W is genrsz

(2) U genrsz, $\mathbf{u} \in \operatorname{span}(U \setminus \{\mathbf{u}\}) \Rightarrow U \setminus \{\mathbf{u}\}$ is genrsz

(3) W ftln $\Rightarrow$ U is ftln

(4) W ftln, $\mathbf{v} \notin \operatorname{span}(W) \Rightarrow W \cup \{\mathbf{v}\}$ is ftln.

B (1): U-beli lin. komb.-k W-beliek is.

(2): Egy $\mathbf{u}$-t tartalmazó U-beli lin. kombinációban $\mathbf{u}$ lecserélhető egy $U \setminus \{\mathbf{u}\}$-beli kombinációra.

(3): U-beli nemtriviális lin. kombináció W-beli nemtriviális kombináció is, tehát ha U öf lenne, akkor W is öf lenne.

(4): Tfh egy $W \cup \{\mathbf{v}\}$-beli nem triviális kombináció $\mathbf{0}$. Ebben $\mathbf{v}$ nem nulla együtthatóval szerepel, mert W ftln. $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ kifejezhető W-ből. $\lightning$

T **Bázis jellemzése**

$U \subseteq \mathcal{V} \leqslant K^n$-re ekvivalens:

(i) U ftln és genrsz (azaz U bázis)

(ii) U minimális genrsz $\mathcal{V}$-ben

(iii) U maximális ftln $\mathcal{V}$-ben

(iv) $\mathcal{V}$ minden eleme felírható U-beliek lin. komb.-jaként, és ebben a felírásban az együtthatók egyértelműek.

B $(i) \Rightarrow (ii)$: Tetsz. $\mathbf{u} \in U$-ra $\mathbf{u} \notin \operatorname{span}(U \setminus \{\mathbf{u}\})$, tehát U valódi részhalmazai nem genrsz-ek.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Ftln: különben létezne $\mathbf{u} \in \operatorname{span}(U \setminus \{\mathbf{u}\})$, tehát U nem lenne min. Á(2) szerint.

Max. ftln: Ha $\exists$ bővebb ftln $\Rightarrow \exists \mathbf{v}$: $U \cup \{\mathbf{v}\}$ ftln $\Rightarrow \mathbf{v} \notin \operatorname{span}(U) \Rightarrow$ U nem genrsz. $\lightning$

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Felírható: max. ftln $\Rightarrow \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \setminus U$-ra $U \cup \{\mathbf{v}\}$ nem ftln $\Rightarrow \mathbf{v} \in \operatorname{span}(U)$ Á(4) miatt $\Rightarrow \mathbf{v}$ felírható U-ból (az U-beliek meg nyilván).

Egyértelműen: két felírás különbsége a $\mathbf{0}$ nemtriviális előállítása lenne. $\lightning U$ ftln

$(iv) \Rightarrow (i)$: genrsz: $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ felírható U-ból.

ftln: a $\mathbf{0}$ is csak egyféleképpen állítható elő (azaz csak 0 együtthatókkal).

P Egy mátrix bázisoszlopai (a lépcsős alak vezérelemet tartalmazó oszlopainak megfelelő sorszámú oszlopai) az oszlopterének bázisát adják.

P $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ bázisa K^n-nek, mert minden vektor egyértelműen írható fel ezek lineáris kombinációjaként. Ezt a bázist a K^n standard bázisának nevezzük.

T **Bázistétel**

Minden $\mathcal{V} \leqslant K^n$ vektortérnek van bázisa. A bázis elemszáma egyértelmű, és $\leqslant n$.

B K^n-ben nincs n-nél több ftln vektor, mert ha $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ ftln, akkor $\operatorname{rref}[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_r]$ minden oszlopában van vezéregyes, de legföljebb n vezéregyes lehet az n sorban. Így $r \leqslant n$.

Tehát $\mathcal{V}$-ben van maximális ftln részhalmaz, ami a tétel szerint bázis, és láttuk, hogy $\leqslant n$ elemszámú.

Az elemszám egyértelműsége: Tfh $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r\}$ és $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_s\}$ is bázis, ahol $r \leqslant s$.

Legyen $B = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_r]$ és $C = [\mathbf{c}_1 \ldots \mathbf{c}_s]$. Ekkor a $[B \mid C]$ szimultán er. redukált lépcsős alakja $[L \mid C']$, ahol L minden oszlopa bázisoszlop.

Az egyrsz. megoldható, mert $\mathcal{B}$ genrsz. $\Rightarrow$

C'-ben $\leqslant r$ nemnulla sor van $\Rightarrow \operatorname{rref} C = \operatorname{rref} C'$-ben $\leqslant r$ vezérelem van, de minden oszlopban van vezérlem $\Rightarrow s \leqslant r \Rightarrow r = s$.

Mj A vektortereknek fontos és különleges tulajdonsága, hogy minden min. genszr-e ugyanannyi elemű. Pl. Abel-csoportokban ez nem igaz: $(\mathbb{Z}_6, +)$-ban $\{2, 3\}$ és $\{1\}$ is minimális generátorrendszer.

D **Dimenzió**

$\mathcal{V}$ dimenziója: $\dim_K \mathcal{V} = \dim \mathcal{V}$ a $\mathcal{V}$ tetszőleges bázisának elemszáma.

P $\{\mathbf{0}\}$ 0-dimenziós (bázisa $\emptyset$)

$\mathbb{R}^3$-ben az origón átmenő egyenesek 1-dimenziósak, az origón átmenő síkok 2-dimenziósak.

Néhány alapvető tény a dimenzióról

- K^n dimenziója n, mert a standard bázis n elemű. $\Rightarrow$
- K^n minden bázisa n elemű.

Ha $\dim \mathcal{V} = m$:

- $\mathcal{V}$-ben minden genrszr $\geqslant m$ elemű (ui. leszűkíthető bázissá).
- $\mathcal{V}$-ben minden ftln halmaz $\leqslant m$ elemű (ui. kibővíthető bázissá)
- $\mathcal{V}$ tetsz. m elemű részhalmaza

  bázis $\Leftrightarrow$ ftln $\Leftrightarrow$ genrsz.

$\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$-re

- $\dim \mathcal{U} \leqslant \dim \mathcal{V}$ ($\mathcal{U}$ bázisa ftln $\mathcal{V}$-ben is)
- $\mathcal{U} = \mathcal{V} \Leftrightarrow \dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V}$:

  $\Rightarrow$: ✓

  $\Leftarrow$: különben $\mathcal{U}$ bázisa még nem bázis $\mathcal{V}$-ben, de akkor kibővíthető $\mathcal{V}$ bázisává legalább egy elem hozzáadásával, tehát $\dim \mathcal{U} < \dim \mathcal{V}$ ↯

P Független-e $\mathbb{R}^4$-ben:

$\mathbf{a} = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (-1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{d} = (0, 0, 0, 1)$?

m1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow\longrightarrow ? \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

m2 Lássuk be, hogy mindent generálnak! Elég: az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$-et generálják.

$\mathcal{V} := \operatorname{span}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$.

$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathbf{a} - \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \in \mathcal{V}$,

$\mathbf{e}_4 = \mathbf{d} \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathbf{e}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 \in \mathcal{V}$. Igen.

D

Definíció

Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ bázisa a $\mathcal{V} \leqslant K^n$ vektortérnek, ahol a báziselemek sorrendje is rögzítve van.

Tetszőleges $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$-re a $\mathbf{v}$ koordinátavektora a $\mathcal{B}$ bázisra nézve:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, \text{ ahol } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{b}_i$$

Tudjuk, hogy ez a koordinátavektor egyértelmű.

P Legyen $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,2,-1),(1,1,0)\}$.

a) Lássuk be, hogy $\mathcal{B}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben!

b) $\mathbf{v} = (1,0,0)$-ra $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = ?$ c) $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w} = ?$

m Keressük azt a $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$ vektort, amelyre $x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{v}$.

Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A red. lépcsős alakból látszik az is, hogy $\mathcal{B}$ független, s mivel $|\mathcal{B}| = 3$, bázis is.

$$\mathbf{w} = 5\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3 = 5\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Lineáris leképezések

D K^n-ben két vektor standard skalárszorzata $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in K$.

D Mátrix és oszlopvektor szorzata:

$A \in K^{m \times n}$-re és $\mathbf{x} \in K^{n \times 1}$-re

$A\mathbf{x} \in K^{m \times 1}$ az A oszlopainak $x_1, \ldots, x_n$ együtthatós lineáris kombinációja

$$A\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

P Ha $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ a $\mathcal{V}$ vektortér egy bázisa (oszlopvektorokkal írva), és $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$, akkor

$\mathbf{v} = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_m]\mathbf{x}$ mint oszlopvektor.

P Lineáris er. szorzatos alakja:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Oszlopmodell: $x_1\mathbf{o}_1 + \ldots + x_n\mathbf{o}_n = \mathbf{b}$

Sormodell: $\begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{s}_m \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Á $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$

$A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}$.

B $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)\mathbf{o}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{o}_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{o}_i = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$

$A(\lambda\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i)\mathbf{o}_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{o}_i = \lambda A\mathbf{x}$

D **Lineáris leképezés**

Legyenek $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ K fölötti vektorterek.

$f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezés, ha

$$\left.\begin{array}{rcl} f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) & = & f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v}) \\ f(\lambda\mathbf{v}) & = & \lambda f(\mathbf{v}) \end{array}\right\} \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V, \quad \lambda \in K$$

K Ha f lineáris, akkor $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (ui. $f(\mathbf{0}) = f(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$).

P1 $A \in K^{m\times n}$-re $f_A : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ lineáris leképezés K^n-ből K^m-be.

P2 Ha $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egybevágóság, ami helyben hagyja az origót, akkor az szintén lineáris leképezés, mert paralelogrammát paralelogrammába visz (tehát tartja az összeget), és aránytartó (tehát tartja a skalárszorost).

Pl. origón átmenő síkra való tükrözés, origón átmenő egyenes körüli forgatás ilyenek.

P3 Ha $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ bázisa a $\mathcal{V}$ vektortérnek, akkor a $k_{\mathcal{B}} : V \to K^m$, $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ koordinátázó leképezés:

$\mathbf{u} = \sum x_i \mathbf{b}_i$ és $\mathbf{v} = \sum y_i \mathbf{b}_i$-re

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \sum (x_i + y_i)\mathbf{b}_i \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y} = k_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) + k_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$

$\lambda \mathbf{v} = \sum (\lambda_i y_i)\mathbf{b}_i \mapsto \lambda \mathbf{y} = \lambda k_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$.

Sőt, ez a leképezés szürjektív és injektív, azaz bijektív is:

szürjektív, mert minden $\mathbf{x}$ előáll az $\sum x_i \mathbf{b}_i$ képeként, és

injektív, mert ha $k_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) = k_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = \mathbf{z}$, akkor $\mathbf{u} = \sum z_i \mathbf{b}_i = \mathbf{v}$.

D **Képtér és magtér**

Legyen $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezés

f képtere $\operatorname{Im} f = \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$ és

f magtere $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$

Á $\operatorname{Im} f \leqslant \mathcal{W}$ és $\operatorname{Ker} f \leqslant \mathcal{V}$.

B $\mathbf{0} = f(\mathbf{0}) \in \operatorname{Im} f$, tehát $\operatorname{Im} f \neq \emptyset$, és $f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v}) \in \operatorname{Im} f$-re $f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in \operatorname{Im} f$ és $\lambda f(\mathbf{u}) = f(\lambda \mathbf{u}) \in \operatorname{Im} f$ $(\lambda \in K)$.

$\mathbf{0} \in \operatorname{Ker} f$, és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$-re $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow$ $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$, és $f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda \mathbf{u} \in \operatorname{Ker} f$ $(\lambda \in K)$.

Á f szürjektív $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \mathcal{W}$

f injektív $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = 0$.

B A szürjektivitás nyilvánvaló. ✓

Ha f injektív, akkor $\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$,

Ha $\operatorname{Ker} f = 0$, és $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) \Rightarrow f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

P Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az $S: \ x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés (ez lineáris, mert $\mathbf{0} \in S \Rightarrow \mathbf{0} \mapsto \mathbf{0}$, és a vetítés párhuzomosságtartó). Mi az f magtere és a képtere?

m A képtér maga az S sík (minden elő is áll, mint önmga vetülete), a magtér az S normálegyenese. $\dim \operatorname{Im} f = 2$, $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

T **Dimenziótétel**

$f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris $\Rightarrow \dim \mathcal{V} = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

B Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ a $\operatorname{Ker} f$ bázisa. $\rightsquigarrow$ $\mathcal{B}$ ftln $\mathcal{V}$-ben $\rightsquigarrow$ kiegészíthető $\mathcal{V}$ bázisává: valamely $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_r\}$-re $\mathcal{B} \dot\cup \mathcal{C}$ bázis.

Ekkor $f(\mathcal{C}) := \{f(\mathbf{c}_1), \ldots, f(\mathbf{c}_r)\}$ bázis $\operatorname{Im} f$-ben:

genrsz: $f(\mathbf{v}) = f(\sum x_i \mathbf{b}_i + \sum y_j \mathbf{c}_j) = \sum x_i f(\mathbf{b}_i) + \sum y_j f(\mathbf{c}_j) = \mathbf{0} + \sum y_j f(\mathbf{c}_j) \in \operatorname{span} f(\mathcal{C})$

ftln: Ha $\sum x_i f(\mathbf{c}_i) = \mathbf{0} \rightsquigarrow f(\sum x_i \mathbf{c}_i) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \sum x_i \mathbf{c}_i \in \operatorname{Ker} f \rightsquigarrow \sum x_i \mathbf{c}_i = \sum y_j \mathbf{b}_j$ valamely y_j-kre.

De $\mathcal{B} \dot\cup \mathcal{C}$ bázis $\rightsquigarrow$ az egyértelmű felírhatóság miatt $x_i = y_j = 0 \ \forall i, j$.

(Ebből az is kijött, hogy $f(\mathbf{c}_i)$ különbözők, tehát $|f(\mathcal{C})| = |\mathcal{C}| = r$.)

$k = \dim \operatorname{Ker} f$, $r = \dim \operatorname{Im} f$, $k + r = \dim \mathcal{V} \rightsquigarrow$

$\dim \mathcal{V} = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

Sortér, oszloptér, nulltér, rang

D $A \in K^{m\times n}$. A mátrixhoz tartozó nevezetes alterek:

A oszloptere: $\mathcal{O}(A)$ az A oszlopai által kifeszített altér K^m-ben.

A sortere: $\mathcal{S}(A)$ az A sorai által kifeszített altér K^n-ben.

A nulltere: $\mathcal{N}(A)$ az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén er. megoldástere (K^n-ben).

K Ha $A \in K^{m\times n}$, akkor $f : K^n \to K^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$-re

$\operatorname{Im} f = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in K^n\} = \mathcal{O}(A)$.

$\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{x} \in K^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \mathcal{N}(A)$.

T **Dimenziótétel mátrixokra**

$A \in K^{m\times n} \Rightarrow n = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{O}(A)$

B Alkalmazzuk a lineáris leképezések dimenziótételét az $f : K^n \to K^m$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ leképezésre.

T **Mátrixhoz tartozó nevezetes alterek bázisa**

Legyen $A \in K^{m \times n}$.

(1) $\mathcal{O}(A)$-nak bázisát alkotják az A bázisoszlopai, azaz az A azon oszlopai, amelyek a lépcsős alak vezérelemeket tartalmazó oszlopainak megfelelő pozícióban vannak.

(2) $\mathcal{S}(A)$-nak bázisát alkotják tetszőleges lépcsős alakjának a nemnulla sorai.

(3) $\mathcal{N}(A)$-nak bázisát adják az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldásának vektoros alakjában a paraméterek vektoregyütthatói.

B (1): Láttuk, hogy a bázisoszlopok ftln-ek, és generálják a többi oszlopot, tehát az oszlopteret is.
(2): Az elemi sorműveletek nem változtatják a sorteret (az oszlopteret igen!), ui. az új sorokat ki tudjuk generálni a régiekből, és ez visszafordítható.

Legyenek egy lépcsős alak nemnulla sorai rendre $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_r$. Ekkor $\mathcal{S}(A) = \operatorname{span}(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_r)$. Belátjuk, hogy ftln-ek is. Tfh nem.

$\exists \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{s}_i = \mathbf{0}$, ahol λ_j az első nem nulla együttható.

A j. vezérelem oszlopának a j. az utolsó $\neq 0$ eleme, legyen ez c. $\Rightarrow$

$\sum \lambda_i \mathbf{s}_i$ j. komponense $\lambda_j c \neq 0$ ↯

(3): Ha $t_1\mathbf{v}_1 + \ldots + t_k\mathbf{v}_k$ $(t_1, \ldots, t_k \in K)$ az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldása, ahol az i. szabad változóhoz rendeltük a t_i-t, akkor

$\mathcal{N}(A) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$, azaz $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ genrsz. $\mathcal{N}(A)$-ban.

Másrészt a dimenziótétel miatt $\dim \mathcal{N}(A) = n - \dim \mathcal{O}(A) = k$, ugyanis n az összes, $\dim \mathcal{O}(A)$ pedig a kötött változók száma. $\Rightarrow$

a $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ genrsz bázis is $\mathcal{N}(A)$-ban.

F Adjuk meg az alábbi A mátrixra $\mathcal{O}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ és $\mathcal{N}(A)$ egy-egy bázisát! Írjuk fel a mátrix oszlopainak a koordinátavektorát az $\mathcal{O}(A)$ megadott bázisára nézve!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{S}(A)$ bázisa a (redukált) lépcsős alak nemnulla sorai:
$= \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\} = \{(1,0,1,0,2), (0,1,2,0,2), (0,0,0,1,1)\}$.

A bázisoszlopok az 1., 2. és 4., tehát $\mathcal{O}(A)$ bázisa $\{(1,2,0,1),(0,-1,1,-1),(0,1,1,1)\}$.

Az oszlopoknak erre a bázisra vonatkozó koordinátavektorai leolvashatók a redukált lépcsős alak oszlopaiból:

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}\right\}. \text{ Ell.: } \begin{aligned}\mathbf{a}_3 &= \mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2 \checkmark\\ \mathbf{a}_5 &= 2\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_4 \checkmark\end{aligned}$$

Az $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ megoldása is leolvasható a redukált lépcsős alakból.

Szabad változók: $x_3=s$, $x_5=t$, és ebből a megoldás:

$$\begin{bmatrix}-s-2t\\-2s-2t\\s\\-t\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\-2\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Így $\mathcal{N}(A)$ bázisa $\{-1,-2,1,0,0),(-2,-2,0,-1,1)\}$.

D **Rang**

$f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezés rangja $\dim \operatorname{Im} f$

$A \in K^{m \times n}$ mátrix rangja $\dim \mathcal{O}(A)$, azaz az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ lin. lekép. rangja.

Jele: $r(f)$, $r(A)$.

T A rang ekvivalensei

$A \in K^{m \times n}$-re és a vele sorekvivalens L lépcsős mátrixra

A rangja $= \dim \mathcal{O}(A) = \dim \mathcal{S}(A) =$

L vezérelemeinek a száma $=$

L nemnulla sorainak a száma.

B Az előbbi tételből

$\dim \mathcal{O}(A) = L$ bázisoszlopainak a száma $= L$ vezérelemeinek a száma

$\dim \mathcal{S}(A) = L$ nemnulla sorainak a száma

és a kettő megegyezik, mert L vezérelemei egy-egy nemnulla sorhoz tartoznak.

K Egy $m \times n$-es mátrix rangja $\leqslant \min\{m, n\}$,

ui. $\mathcal{O}(A) \leqslant K^m \Rightarrow \dim \mathcal{O}(A) \leqslant m$, és

$\mathcal{S}(A) \leqslant K^n \Rightarrow \dim \mathcal{S}(A) \leqslant n$.

F Mennyi a rangja következő mátrixoknak?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \vdots & & & \\ (n-1)n+1 & & \dots & n^2 \end{bmatrix}$$

m Az első sorterének bázisa $\{(1, 2-1)\}$. $\Rightarrow$ Rangja 1.

A második sorcserékkel red. lépcsős alakra hozható, n vezéregyessel. $\Rightarrow$ Rangja n. (Vagy: $\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_1 \in \mathcal{O}(A)$ látszik a mátrixból.)

A harmadiknál vonjuk ki az első sort az összes többiből, majd ezeket rendre osszuk le n-nel, $2n$-nel... Ezután könnyen redukálható két nemnulla sort tartalmazó lépcsős alakúvá. $\Rightarrow$ Rangja 2.

P Mely mátrixoknak 0, illetve 1 a rangja?

m 0 csak a 0 mátrixnak (különben marad vezérelem a lépcsős alakban).

1 rangúnak a sorai páronként összefüggők, azaz az összes sorát meg lehet kapni egyetlen nemnulla sorának skalárszorosaként.

Ugyanez az oszlopokra is igaz.

T **Lineáris er. megoldhatóságának mátrixrangos feltétele**

$A \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

(1) Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er. konzisztens $\Leftrightarrow r(A) = r([A \mid \mathbf{b}])$

(2) Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er.-nek egyetlen megoldása van $\Leftrightarrow$
$r(A) = r([A \mid \mathbf{b}]) = n$.

B (1): $[A \mid \mathbf{b}] \ \to \to \cdots [L \mid \mathbf{b}']$, ahol $[L \mid \mathbf{b}']$ és így L is lépcsős.

konzisztens $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b}'$ nem nyúlik lejjebb, mint az L, azaz $[L|\mathbf{b}']$-nek pont annyi nemnulla sora van, mint L-nek $\Leftrightarrow r(A) = r([A \mid \mathbf{b}])$.

(2): 1 megoldás van $\Leftrightarrow$ konzisztens, és L minden oszlopában van vezéregyes $\Leftrightarrow r([A \mid \mathbf{b}]) = r(A) = n$.