# Bevezetés az algebrába 1

## Mátrixok műveletei

**Wettl Ferenc** diáinak felhasználásával

**D** **Vektortérműveletek**

$A, B \in K^{m\times n}$-re

$$A + B \in K^{m\times n}, \text{ ahol } (A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$
$$\lambda \in K\text{-ra } \lambda A \in K^{m\times n}, \text{ ahol } (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

($(M)_{ij} = m_{ij}$ az $M$ mátrix $i$. sorának $j$. elemét jelöli. )

**K** Az $m \times n$-es mátrixokat sorfolytonosan írva és $K^{mn}$ vektorának tekintve a $+$ és $\lambda\cdot$ művelet ugyanaz, mint a mátrixokon definiált műveletek, tehát $K^{m\times n}$ is vektortér $K$ fölött, amelynek standard bázisa $\{E_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$, ahol $E_{ij}$ az a mátrix, amelyben az $ij$ indexű elem 1, a többi 0.

**D** **Transzponált**

Az $A \in K^{m\times n}$ mátrix transzponáltja

$$A^T \in K^{n\times m}, \text{ ahol } (A^T)_{ij} = A_{ji}\ \forall i, j.$$

**P** $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

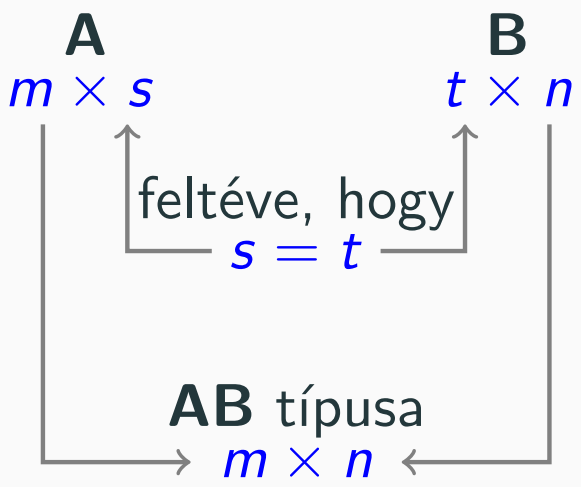
## D Mátrixok szorzata

$A \in K^{\ell \times m}$, $B \in K^{m \times n} \Rightarrow AB \in K^{\ell \times n}$,

ahol $(AB)_{ij} = \sum_{t=1}^{m} a_{it} b_{tj}$, vagyis $A$ $i$. sorának és $B$ $j$. oszlopának a standard skalárszorzata, $(A)_{i*} \cdot (B)_{*j}$.

Fontos! Szorzata csak „összeillő alakú” mátrixoknak van:

$$\begin{bmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{it} \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{tj} & \\ & & \\ & c_{ij} & \end{bmatrix}$$



**Mj** Ha $B$ $m \times 1$-es oszlopvektor $\Rightarrow$ $AB$ a mátrix és vektor korábban definiált szorzata.

**Mj** Egy $R$ gyűrű fölötti mátrixokra is értelmezhetők ezek a műveletek, csak akkor $R^{m \times n}$ nem lesz vektortér, és a szorzat definíciójában szereplő kifejezést nem hívjuk skalárszorzatnak.

**F** Számitsuk ki a következő mátrixkifejezéseket, ha értelmezve vannak!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BC,\ CB,\ 5A,\ A + D,\ AD,\ DA,\ D^T D + A$$

**Á** $A \in K^{\ell \times m}$, $B \in K^{m \times n}$

(1) $AB$ oszlopai $B$ oszlopainak $A$-szorosai:
$A[\mathbf{o}_1 \dots \mathbf{o}_n] = [A\mathbf{o}_1 \mid \dots \mid A\mathbf{o}_n]$.

(2) $AB$ sorai $A$ sorainak $B$-szeresei: $\begin{bmatrix} s_1 \\ \hline \vdots \\ \hline s_\ell \end{bmatrix} \cdot B = \begin{bmatrix} s_1 B \\ \hline \vdots \\ \hline s_\ell B \end{bmatrix}$

(3) $AB$ minden oszlopa lin. komb.-ja $A$ oszlopainak, a $B$ megfelelő oszlopának elemeivel mint együtthatókkal.

(4) $AB$ minden sora lin. komb.-ja a $B$ sorainak, az $A$ megfelelő sorának elemeivel mint együtthatókkal.

**B** (1), (2) a szorzat definíciójából.

(3): $AB$ $j$. oszlopa az (1) miatt $A(B)_{*j}$, így az állítás következik a mátrix-vektor szorzás oszlopmodelljéből.

(4): $AB$ $i$. sora $\left(\sum_t a_{it} b_{t1},\ \dots,\ \sum_t a_{it} b_{tn}\right) = \sum_t a_{it}(b_{t1}, \dots, b_{tb})$, és itt $(b_{t1}, \dots, b_{tn})$ a $B$ $t$. sora.

**K** Adott $A$ mátrixra $X \mapsto AX$ sorműveleteket végez (minden $A$-hoz illő méretű $X$ mátrixon ugyanazokat a sorműveleteket), adott $B$ mátrixra $Y \mapsto YB$ pedig oszlopműveleteket.

**D** Az $n \times n$-es egységmátrix $I = I_n$ az a mátrix, amelynek a főátlójában végig 1 van, a többi eleme pedig nulla.
Az előző tételből következik, hogy $AI_n = A$ és $I_nB = B$ minden $A$ $m \times n$-es, illetve $B$ $n \times m$-es mátrixra.

**D** **Elemi mátrixok**

Az $E \in K^{n \times n}$ mátrix elemi mátrix, ha az $X \mapsto EX$ leképezés elemi sorművelet tetszőleges $X \in K^{n \times m}$ mátrixra.

**Á** Egy adott sorműveletet végrehajtó mátrixot megkaphatunk úgy, hogy az $I_n$ egységmátrixra végrehajtuk azt a sorműveletet.

**B** Az $I$ egységmátrixon is ugyanazzal a sorművelettel hat az $E$-vel való balszorzás, viszont $EI = E$.

**F** Írjuk fel azt az $E$ elemi mátrixot, amely az ötsoros mátrixokon a 3. sorhoz hozzáadja az 1. sor kétszeresét! Milyen oszlopműveletet ad az $E$-vel való jobbszorzás?

**m**

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Y \mapsto YE$ a harmadik oszlop kétszeresét adja az elsőhöz. ($E^T$ végezné az $E$-hez tartozó sorműveletnek megfelelő oszlopműveletet).

# Mátrixműveletek és rang

**Á** **Mátrixműveletek és rang kapcsolata**

Tfh. $A, C \in K^{\ell \times m}$, $B \in K^{m \times n}$. Ekkor

(1) $r(A^T) = r(A)$

(2) $r(A + C) \leqslant r(A) + r(C)$

(3) $r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$.

**B** (1): $\mathcal{S}(A) = \mathcal{O}(A^T) \Rightarrow r(A^T) = \dim \mathcal{O}(A^T) = \dim \mathcal{S}(A) = r(A)$.

(2): $\mathcal{S}(A + C) \leqslant \operatorname{span}(\mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(C))$, és az utóbbinak van $r(A) + r(C)$ elemű generátorrendszere (a két genrsz uniója) $\Rightarrow$ $r(A + C) \leqslant \dim \operatorname{span}(\mathcal{S}(A) \cup \mathcal{S}(C)) \leqslant r(A) + r(C)$.

(3): Az előző tétel miatt
$$\begin{array}{rclcrcl} \mathcal{O}(AB) & \leqslant & \mathcal{O}(A) & \Rightarrow & r(AB) & \leqslant & r(A) \\ \mathcal{S}(AB) & \leqslant & \mathcal{S}(B) & \Rightarrow & r(AB) & \leqslant & r(B) \end{array}$$

**P** (2), (3)-ban általában nincs egyenlőség:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
és a rangokra $2 + 2 \neq 0$ és $\min\{1, 1\} \neq 0$.

**D** $A \in K^{m\times n}$ teljes rangú, ha $r(A) = \min\{m, n\}$.

**T** **Bázisfelbontás**

Legyen $A \in K^{m\times n}$, $r(A) = r \geqslant 1$.
Ekkor $A$ felbontható két $r$ rangú, teljes rangú mátrix szorzatára:
$A = BR$, ahol $B \in K^{m\times r}$ oszlopai az $A$ bázisoszlopai, és
$R \in K^{r\times n}$ sorai $A$ redukált lépcsős alakjának nemnulla sorai.

**B** Tudjuk, hogy ha $L$ red. lépcsős alakjának $i$. oszlopa $[t_1 \dots t_r\ 0 \dots 0]^T$, akkor az $A$ $i$. oszlopa az $A$ bázisoszlopainak $(t_1, \dots, t_r)$ együtthatós lineáris kombinációja.
$\Rightarrow$ $BR$ $i$. oszlopa az $A$ $i$. oszlopa.
$r$ darab bázisoszlop van, és ezek ftln-ek
$\Rightarrow$ $B \in K^{m\times r}$, és $r(B) = r$.
$L$-nek $r$ darab nemnulla sora van, és ezek is ftln-ek
$\Rightarrow$ $R \in K^{r\times n}$ és $r(R) = r$.

**Mj** A bázisfelbontás olyan szorzatra bontás, ahol a szorzat rangjára vonatkozó korlát éles.

## Vektorok szorzatai mátrixként

Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ oszlopvektorok.

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in K^{n\times 1}$ vektorok skalárszorzata: $\mathbf{a}^T\mathbf{b} = [\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}]_{1\times 1}$ (az $1\times 1$-es mátrixokat azonosíthatjuk $K$ elemeivel).

**D** diadikus szorzat vagy diád: $\mathbf{a} \in K^{m\times 1}$ és $\mathbf{b} \in K^{n\times 1}$ vektorokra

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & & & \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \dots & a_mb_n \end{bmatrix} \in K^{m\times n}, \qquad \text{Jele } \mathbf{a}\otimes\mathbf{b}.$$

A rangjuk:

$r(\mathbf{a}^T\mathbf{b}) = 0$ vagy $1$ $(\leqslant \min\{r(\mathbf{a}), r(\mathbf{b})\} \leqslant 1)$

$$R(\mathbf{a}\mathbf{b}^T) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

**L** Ha $A \in K^{\ell \times m}$, $B \in K^{m \times n}$, akkor $AB = \sum_{t=1}^{m} (A)_{*t}(B)_{t*}$, tehát $AB$ $m$ darab diád összege.

**B**

$$AB = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \dots & \sum_t a_{it} b_{tj} & \\ & & \end{bmatrix} = \sum_{t=1}^{m} \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \dots & a_{it} b_{tj} & \\ & & \end{bmatrix} = \sum_{t=1}^{m} \begin{bmatrix} a_{1t} \\ \vdots \\ a_{\ell t} \end{bmatrix} [b_{t1} \dots b_{tn}]$$

$$= \sum_{t=1}^{m} (A)_{*t}(B)_{t*}$$

**Á** **Diádokra bontás**

Legyen $A \in K^{m \times n}$, $r(A) = r$. Ekkor $A$ felbontható $r$ darab (1 rangú) diád összegére, de kevesebbre nem.

**B** Az $A = BR$ bázisfelbontás az előző lemmával megadja az $r$ diádra bontást. Másrészt ha $A = M_1 + \ldots + M_k$ diádokra bontás $\Rightarrow$ $r = r(A) \leqslant 1 + \ldots + 1 = k$.

**F** Írjuk fel az alábbi $A$ mátrix bázisfelbontását, és bontsuk fel az $A$ mátrixot $r(A)$ darab 1 rangú mátrix összegére!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**m**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = BR = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

# Mátrixok műveleti tulajdonságai

**T** **Mátrixszorzás asszociativitása**

A mátrixszorzás asszociatív, azaz ha
$A \in K^{k\times\ell}$, $B \in K^{\ell\times m}$, $C \in K^{m\times n}$, akkor $(AB)C = A(BC)$.

**B** $((AB)C)_{ij} = \sum_{t=1}^{m} (AB)_{it} c_{tj} = \sum_{t=1}^{m} \left( \sum_{s=1}^{\ell} a_{is} b_{st} \right) c_{tj} = \sum_{t=1}^{m} \sum_{s=1}^{\ell} a_{is} b_{st} c_{tj}$

$(A(BC))_{ij} = \sum_{s=1}^{\ell} a_{is} (BC)_{sj} = \sum_{s=1}^{\ell} a_{is} \left( \sum_{t=1}^{m} b_{st} c_{tj} \right) = \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{t=1}^{m} a_{is} b_{st} c_{tj}$

$\Rightarrow ((AB)C)_{ij} = (A(BC))_{ij}$ $\forall i, j$-re.

T

## Mátrixok műveleti tulajdonságai

$A, B, C$ mátrixokra, amelyekre a kifejezések értelmezve vannak:

| összeadás: | szorzás: | transzp.: |
|---|---|---|
| $A + B = B + A$ | — | $(A^T)^T = A$ |
| $(A + B) + C$ | $(AB)C = A(BC)$ | $(A+B)^T = A^T + B^T$ |
| $= A + (B + C)$ | | $(AB)^T = B^T A^T$ |
| $A + 0 = A$ | $AI = A$ és $IA = A$ | |
| $A + (-A) = 0$ | | |

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(B + C)A = BA + CA$$

Skalárral való szorzás és a többi művelet:

$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$

$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A), \quad 1 \cdot A = A,$

$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB),$

$(\lambda A)^T = \lambda A^T.$

**B** A vektortér-axiómák, a szorzás asszociativitása és az $I$-vel szorzás már volt.

A transzponálás tulajdonságai: $(A^T)^T = A$ nyilván.

$((A+B)^T)_{ij} = (A+B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} = (A^T + B^T)_{ij}$

$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_t a_{jt} b_{ti} = \sum_t b_{ti} a_{jt} = \sum_t (B^T)_{it} (A^T)_{tj} = (B^T A^T)_{ij}$

$((\lambda A)^T)_{ij} = (\lambda A)_{ji} = \lambda a_{ji} = \lambda (A^T)_{ij} = (\lambda A^T)_{ij}$

Disztributivitás:

$(A(B+C))_{ij} = \sum_t a_{it}(B+C)_{tj} = \sum_t a_{it}(b_{tj} + c_{tj}) = \sum_t (a_{it} b_{tj} + a_{it} c_{tj}) = \sum_t a_{it} b_{tj} + \sum_t a_{it} c_{tj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB + AC)_{ij}$

$(B+C)A = ((B+C)A)^{TT} = (A^T (B+C)^T)^T = (A^T (B^T + C^T))^T = (A^T B^T + A^T C^T)^T = (A^T B^T)^T + (A^T C^T)^T = B^{TT} A^{TT} + C^{TT} A^{TT} = BA + CA.$

$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$: mindegyikben $(AB)_{ij}$ $\forall$ tagja $\lambda$-val szorzódik.

**P1** A mátrixok szorzása általában nem kommutatív:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

**P2** Előfordulhat, hogy $A, B \neq 0$, de $AB = 0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

**K** $K^{m \times n}$ vektortér, és a transzponálás lineáris leképezés $K^{m \times n}$-ből $K^{n \times m}$-be.

**K** $K^{n \times n}$ egységelemes gyűrű (és emellett vektortér is $\rightsquigarrow$ „$K$ fölötti algebra"), de $n > 1$ esetén nem kommutatív, és nem is nullosztómentes.

# Lineáris leképezések mátrixa

**L** Legyen $A, B \in K^{m \times n}$, és $\mathcal{C}$ a $K^n$ egy tetszőleges bázisa. Ekkor ekvivalens:

(i) $A = B$

(ii) $A\mathbf{c}_i = B\mathbf{c}_i \ \forall \mathbf{c}_i \in \mathcal{C}$

(iii) $A\mathbf{v} = B\mathbf{v} \ \forall \mathbf{v} \in K^n$

**B** $(i) \Rightarrow (ii)$: ✓

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Tetsz. $\mathbf{v} \in K^n$-re legyen $\mathbf{x} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$. Ekkor

$A\mathbf{v} = A(\sum x_i \mathbf{c}_i) = \sum x_i (A\mathbf{c}_i) \overset{(ii)}{=} \sum x_i (B\mathbf{c}_i) = B(\sum x_i \mathbf{c}_i) = B\mathbf{v}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: $A = AI_n = A[\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n] = [A\mathbf{e}_1 \mid \dots \mid A\mathbf{e}_n] \overset{(iii)}{=}$

$[B\mathbf{e}_1 \mid \dots \mid B\mathbf{e}_n] = B[\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n] = BI_n = B$

**T** **Tétel**

Tfh $f : K^n \to K^m$ lineáris leképezés. Ekkor $\exists!\ A \in K^{m\times n}$, hogy $\forall \mathbf{x} \in K^n$-re $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, ahol $K^n$ és $K^m$ elemeit oszlopvektorokként írjuk. Ez a mátrix

$$A = [f(\mathbf{e}_1) \dots f(\mathbf{e}_n)].$$

**B** Tetszőleges $\mathbf{x}$-re $\mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{e}_i$, így $f(\mathbf{x}) = f(\sum x_i \mathbf{e}_i) = \sum f(x_i \mathbf{e}_i) = \sum x_i f(\mathbf{e}_i) = A\mathbf{x}$ a tételbeli $A$ mátrixszal.

A lemma miatt ez az $A$ mátrix egyértelmű.

**D** A tételbeli $A$ mátrixot az $f$ lineáris leképezés standard mátrixának hívjuk. Az $A$ mátrixhoz tartozó $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ leépezést pedig az $A$-hoz tartozó mátrixleképezésnek.

**F** Mi a $z$ tengely körüli $+90°$-os forgatás standard mátrixa?

**m** $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \mapsto -\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_3$. $\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**F** Melyik az a mátrix, amelyhez tartozó mátrixleképezés az $\mathbb{R}^3$-öt tükrözi az $x + y - 2z = 0$ síkra? (Lineáris, mert egybevágóság, és az origót helyben hagyja.)

**m** Vegyük $\mathbb{R}^3$-nek egy olyan bázisát, amelynek két vektora ebben a síkban van, a harmadik merőleges rá, pl. $\mathbf{c}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{c}_2 = (0, 2, 1)$, $\mathbf{c}_3 = (1, 1, -2)$. Ekkor olyan $A$ mátrixot kell keresnünk, amelyre a $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ és $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixra $AB = C$, azaz $B^T A^T = C^T$, és ez utóbbit megoldhatjuk szimultán egyenletrendszerként $X = A^T$ ismeretlen mátrixra, ugyanis az kell, hogy $B^T (X)_{*i} = (C^T)_{*i}$ minden $i$-re.

(folyt.)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Tehát $X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ és $A = X^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(Később látni fogjuk: nem véletlenül igaz a tükrözés mátrixára, hogy önmaga transzponáltja.)

**T** **Előírhatósági tétel**

$\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ vektortér $K$ fölött, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bázisa $\mathcal{V}$-nek. ekkor tetsz. $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ vektorokra $\exists!\ f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezés, amelyre $f(\mathbf{b}_i) = \mathbf{w}_i\ \forall i$.

**B** Létezés: $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$-re legyen $\mathbf{x} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, és $f(\mathbf{v}) := \sum x_i \mathbf{w}_i$.

Erre valóban teljesül, hogy $f(\mathbf{b}_i) = \mathbf{w}_i$, ugyanis $[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} = \mathbf{e}_i$.

$f$ lineáris: ha $\mathbf{x}' = [\mathbf{v}']_{\mathcal{B}}$, akkor $[\mathbf{v} + \mathbf{v}']_{\mathcal{B}} = \mathbf{x} + \mathbf{x}'$ és $[\lambda \mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \lambda \mathbf{x}$, mert a $k_{\mathcal{B}}$ koordinátázó leképezés lineáris. $\Rightarrow$

$f(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = \sum (x_i + x_i')\mathbf{w}_i = \sum x_i \mathbf{w}_i + \sum x_i' \mathbf{w}_i = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{v}')$

$f(\lambda \mathbf{v}) = \sum (\lambda x_i)\mathbf{w}_i = \lambda(\sum x_i \mathbf{w}_i) = \lambda f(\mathbf{v})$.

Egyértelműség: Ha $f(\mathbf{b}_i) = g(\mathbf{b}_i)$ minden $i$-re, akkor

$f(\sum x_i \mathbf{b}_i) = \sum x_i f(\mathbf{b}_i) = \sum x_i g(\mathbf{b}_i) = g(\sum x_i \mathbf{b}_i)\ \forall \mathbf{x} \Rightarrow$

$f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v})\ \forall\ \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, mert $\mathcal{B}$ generátorrendszer.

**D** $f, g : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, $h : \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ lin. leképezés, $\lambda \in K$.

$(f + g)(\mathbf{v}) := f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$,

$(\lambda f)(\mathbf{v}) := \lambda f(\mathbf{v})$,

$(h \circ f)(\mathbf{v}) := h(f(\mathbf{v}))$.

(Könnyű ellenőrizni, hogy ezek lineárisak.)

**Á** Legyen $A, B \in K^{m \times n}$, $C \in K^{\ell \times m}$, és

$f_A$, $f_B : K^n \to K^m$, $f_C : K^m \to K^\ell$ az $A, B, C$-hez tartozó lineáris leképezések: $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \mapsto C\mathbf{x}$.

Ekkor $f_A + f_B = f_{A+B}$, $\lambda f_A = f_{\lambda A}$ $(\lambda \in K)$, $f_C \circ f_A = f_{CA}$.

**B** $(f_A + f_B)\mathbf{x} = f_A(\mathbf{x}) + f_B(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + B\mathbf{x} = (A + B)\mathbf{x} = f_{A+B}(\mathbf{x})$.

$(\lambda f_A)(\mathbf{x}) = \lambda(f_A(\mathbf{x})) = \lambda(A\mathbf{x}) = (\lambda A)\mathbf{x} = f_{\lambda A}(\mathbf{x})$.

$(f_C \circ f_A)(\mathbf{x}) = f_C(f_A(\mathbf{x})) = f_C(A\mathbf{x}) = C(A\mathbf{x}) = (CA)\mathbf{x} = f_{CA}(\mathbf{x})$.

**P** Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a standard mátrixát, amely az $\mathbb{R}^2$-et először tükrözi az $y = x$ egyenesre, majd az $x$ tengelyre.

**m** $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto -\mathbf{e}_2$

$\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_1$.

$\Rightarrow$ A mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Vagy: Az első tükrözés mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, a másodiké $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

a kettő kompozíciójáé (jobbról balra szorozva):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**D** **Lineáris transzformáció**

Az $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris leképezést (azaz amely egy vektortérből önmagába képez) lineáris transzformációnak hívjuk.

**D** Leképezés inverze: $H_1, H_2$ halmazok, $f : H_1 \to H_2$.

$f$ inverze $g : H_2 \to H_1$, ha $g \circ f = \mathrm{id}_{H_1}$ és $f \circ g = \mathrm{id}_{H_2}$,

(ahol $\mathrm{id}_H : H \to H$, $h \mapsto h \; \forall h \in H$ az identitás függvény)

**P** Általában nem elég a $g \circ f = \mathrm{id}_{H_1}$ és $f \circ g = \mathrm{id}_{H_2}$ közül az egyiket föltenni. Pl. az $f, g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto x + 1$ és

$$g : x \mapsto \begin{cases} x - 1 & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvényekre $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$, de $f \circ g \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$.

**D** **Mátrix inverze**

Egy $A$ mátrixnak inverze a $B$ mátrix, ha $AB = I$ és $BA = I$.

$A$ invertálható, ha van inverze.

**K1** Ha $A$ invertálható, akkor csak egy inverze van, ui. ha $B$ és $C$ is inverze, akkor $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$.

**J** $A$ inverze $A^{-1}$

**K2** $A$ invertálható $\Leftrightarrow$ $f_A$ invertálható, és $f_A$ inverze $f_{A^{-1}}$.

**Á** $A$ invertálható $\Rightarrow$ $A$ $n \times n$-es valamely $n$-re (azaz $A$ négyzetes), és $r(A) = n$.

**B** Tfh. $A \in K^{m \times n}$, és $AB = I_m$, $BA = I_n$.

$$\left.\begin{aligned} m &= r(I_m) = r(AB) \leqslant r(A) \leqslant m \\ n &= r(I_n) = r(BA) \leqslant r(A) \leqslant n \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad m = r(A) = n.$$

**P** Egyoldali inverze nem négyzetes mátrixnak is lehet, pl.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\text{-ra } AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \text{de } BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**T** **Tétel**

$A \in K^{n\times n}$-re ekvivalens:

(i) $A$ invertálható,

(ii) $r(A) = n$,

(iii) $A$ redukált lépcsős alakja $I_n$;

és az inverzet megkapjuk az $AX = I$ mátrixegyenlet, azaz szimultán er. megoldásaként: $[A \mid I] \to \to \ \cdots \to [I \mid A^{-1}]$

**B** $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ már volt. $(i) \Rightarrow (ii)$: Az előző állításból.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Az $[A \mid I]$ redukált lépcsős alakja $[I \mid B] \Rightarrow A\mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i$ a $B$ mátrix $\mathbf{b}_i$ oszlopaira. Így $AB = [\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n] = I$.

Ebből $ABA = A$ is következik, tehát $X = BA$ megoldása az $AX = A$ szimultán er-nek. Viszont annak $X = I$ is megoldása, és $A$ redukált lépcsős alakja $I$, így az egyenletrendszer megoldása egyértelmű $\Rightarrow$ $BA = I$. Tehát $AB = BA = I$, így $B$ az $A$ inverze.

**K** Ha $A \in K^{n\times n}$-nek van egyoldali inverze, akkor invertálható.

**B** $AB = I$ vagy $BA = I \Rightarrow r(A) \geqslant r(I) = n$.

**F** Számítsuk ki az inverzeket, ha léteznek!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

**m**

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[B \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Már itt is látszik, hogy $r(B) = 2$, tehát $B$ nem invertálható, nem érdemes tovább folytatni a redukciót.

$$[C \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

**Mj** Ha $\exists A^{-1}$, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $AX = B$, $XA = B$ típusú egyenlet(rendszerek) megoldhatók az $A^{-1}$-zel való beszorzással a megfelelő oldalról:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} AX = B \quad &\Leftrightarrow \quad X = A^{-1}B \\ XA = B \quad &\Leftrightarrow \quad X = BA^{-1} \end{aligned}$$

**P** Állítsuk elő az $(1, -2, 3)$ vektort az előbbi feladat $C$ mátrixának oszlopaiból.

**m** A $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert kell megoldanunk, ahol $\mathbf{b} = (1, -2, 3)^T$. A megoldás $C^{-1}\mathbf{b}$.

$$\begin{bmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 5 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -19 \\ -6 \end{bmatrix},$$

azaz $(1, -2, 3) = 16(2, 1, 4) - 19(1, 0, 1) - 6(2, 3, 7)$.

**F** Oldjuk meg az $XB = M$ mátrixegyenletet, ahol

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

**m** $B$ láthatóan nem invertálható, ezért szimultán er-ként oldjuk meg a mátrixegyenletet. $XB = M \Leftrightarrow B^T X^T = M^T$.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow X^T = \begin{bmatrix} 4-2s & -1-2t \\ s & t \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Á** Tfh $A, B \in K^{n\times n}$ invertálhatók. Ekkor

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

(2) $0 \neq c \in K$-ra $cA$ invertálható, és $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$;

(3) $AB$ invertálható, és $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(4) $A^k$ invertálható, és $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k (=: A^{-k})$;

(5) $A^T$ invertálható, és $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

**B** (1): ✓

Elég az egyik sorrendben ellenőrizni a szorzatot a korábbiak alapján.

(2): $(cA)(\frac{1}{c}A^{-1}) = cc^{-1}AA^{-1} = 1 \cdot I = I$.

(3) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$.

(4): Indukcióval a (3)-ból.

(5): $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$.

# Speciális mátrixok

**D** Egy mátrix főátlója: $a_{ii}$ elemek (diagonális elemek)

**D** diagonális mátrix: $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \in K^{n \times n}$, amelynek a diag. elemei rendre $d_1, \ldots, d_n$, a többi 0.

alsó háromszögmátrix: a főátló fölötti elemek 0-k ($a_{ij} = 0$, ha $i < j$)

felső háromszögmátrix: a főátló alatti elemek 0-k ($a_{ij} = 0$, ha $i > j$)

permutációmátrix: minden sorában és minden oszlopában egyetlen 1-es van, a többi elem 0. (Hatása: permutálja $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$-et.)

diagonális

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & d_n \end{bmatrix}$$

alsó $\Delta$-mátrix

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & * & & d_n \end{bmatrix}$$

felső $\Delta$-mátrix

$$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & d_n \end{bmatrix}$$

**Á** Ha $A, B \in K^{n\times n}$ mindegyike $\begin{cases} \text{diagonális} \\ \text{felső } \Delta \\ \text{alsó } \Delta \end{cases} \Rightarrow \quad AB,\ A+B\ ,cA$ is az,

és a diag. elemei a megfelelő diag. elemek szorzata, összege, ill. $c$-szerese ($c \in K$).

**B** $+$-re, $c\cdot$-re ✓

Szorzat: $C = AB$-re $c_{ij} = \sum\limits_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}$.

Ha $A, B$ felső $\Delta$: az $A$ $i$. sora az $i$. tag előttig, a $B$ $j$-edik oszlopa a $j$. tag után 0, tehát $c_{ij} = 0$, ha $i > j$, és $c_{ii} = a_{ii} b_{ii}$.

Ha alsó $\Delta$-ek, akkor $C^T = B^T A^T$ felső $\Delta$, és a főátlója $C^T$ főátlója.

Diagonális $\Leftrightarrow$ alsó és felső $\Delta$, így erre is igaz az állítás.

**Á** Legyen $A \in K^{n \times n}$ diagonális vagy $\Delta$-mátrix, diag. elemei $d_1 \cdots d_n$.

$A$ invertálható $\Leftrightarrow d_1, \ldots, d_n \neq 0$.

Továbbá $A$ inverze is ugyanolyan alakú.

**B** Felső $\Delta$-re: Ha $d_1 \cdots d_n = 0$, és $d_i = 0$ a legelső nulla az átlóban, akkor az első $i$ oszlop lépcsős mátrix $(i-1)$ nemnulla sorral, így az oszlopok nem függetlenek $\Rightarrow A$ nem invertálható.

Ha $d_i \neq 0 \ \forall i$, akkor $A$ lépcsős, $n$ rangú $\Rightarrow$ invertálható.

Az utóbbi esetben a redukált lépcsős alakra hozást csupa felfelé nullázással lehet megcsinálni $\Rightarrow I = E_m \cdots E_1 A$, ahol $E_i$-k felső $\Delta$ alakú elemi mátrixok $\Rightarrow A^{-1} = E_m \cdots E_1$ felső $\Delta$.

Ha $A$ alsó $\Delta$, akkor $A^T$-ra alkalmazzuk az előzőt.

Diagonálisra: A felső $\Delta$ feltétele érvényes, és

$\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)^{-1} = \operatorname{diag}(d_1^{-1}, \ldots, d_n^{-1})$.

**Á** Permutációmátrixok szorzata permutációmátrix,

mindegyik invertálható,és az inverzük a transzponáltjuk.

**B** Permutációmátrixszal való balszorzás a sorokat permutálja, így továbbra is egy 1-es lesz minden sorban és oszlopban.

Ha $A$ permutációmátrix, $(AA^T)_{ij}$ az $A$ $i$. és $j$. sorának skalárszorzata, és ez nyilván 0, ha $i \neq j$, és 1, ha $i = j$. Így $AA^T = I$, azaz $A^{-1} = A^T$.

# Báziscsere

Legyenek $K^n$ elemei oszlopvektorokként írva ($\mathbf{v} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$, ahol $\mathcal{E}$ a standard bázis), és legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ tetszőleges bázis $K^n$-ben. Ha $\mathbf{v} = \sum x_i \mathbf{b}_i$, azaz $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$, és $P = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n]$, akkor

$$\mathbf{v} = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = P\mathbf{x} = P[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}, \text{ azaz}$$

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = P[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

**D** Ha $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ a $K^n$ két bázisa, akkor a $T_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ áttérési mátrix az a mátrix, amelyre $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ minden $\mathbf{v}$-re, azaz amellyel való balszorzás a vektorok $\mathcal{B}$ szerinti koordinátavektorát a $\mathcal{C}$ szerinti koordinátavektorába képezi.

**K** A fenti példa $P$ mátrixa $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n]$. Mivel $P$ oszlopai bázist alkotnak, $P$ invertálható, és $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}}$ minden $\mathbf{v}$-re, így $P^{-1} = T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$.

**F** Legyen $\mathcal{B} = \{(1,0,1),\ (2,1,3),\ (1,2,4)\}$ az $\mathbb{R}^3$ egy bázisa. Mik a koordinátái az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vektoroknak a $\mathcal{B}$ bázisban?

**m**

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \quad T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = ?$$

$[\mathbf{e}_i]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{e}_i$ a $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ $i$. oszlopa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow [\mathbf{e}_1]_{\mathcal{B}} = (-2,2,-1)^T$, $[\mathbf{e}_2]_{\mathcal{B}} = (-5,3,-1)^T$, $[\mathbf{e}_3]_{\mathcal{B}} = (3,-2,1)^T$.

**P** Tekintsük az $\{(x,y) \mid 3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4\}$ alakzatot $\mathbb{R}^2$-ben. Mi lesz ennek az egyenlete, ha a koordinátarendszert az $\{(1,1),(1,-1)\}$ alapvektorú (szintén derékszögű) koordinátarendszerre cseréljük?

**m** $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ az új bázis.

Ha $\mathbf{v} = (x,y)$, akkor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$.

Tehát $P = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$-re $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'+y' \\ x'-y' \end{bmatrix}$.

Ezt behelyettesítve az egyenletbe:

$4 = 3(x'+y')^2 - 2(x'+y')(x'-y') + 3(x'-y')^2 = 4(x')^2 + 8(y')^2$,

azaz $(x')^2 + \left(\frac{y'}{1/\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ origó középpontú ellipszis, amelynek fél nagytengelye $(1,1)$ irányú, és az új koordinátarendszerben 1, az eredetiben $\sqrt{2}$ hosszú, a másik pedig $(1,-1)$ irányú, és (eredeti méretben) 1 hosszú.

## Lineáris transzformáció mátrixa tetszőleges bázisban

**D** **Transzformáció mátrixa adott bázisban**

$f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin. transzformáció, $\mathcal{B}$ bázis $\mathcal{V}$-ben.

$f$ mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisra nézve az a $C$ mátrix, amelyre

$$C[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [f(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}},$$

azaz $C$ úgy hat a balszorzással a $\mathcal{B}$ szerinti koordinátavektorokon, ahogy $f$ hat a vektorokon. Jele: $[f]_{\mathcal{B}}$.

**T** **Tétel**

Minden $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin. tr.-hoz és $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bázishoz egyértelműen létezik az $f$ mátrixa a $\mathcal{B}$-re nézve, és ez

$$[f]_{\mathcal{B}} = [[f(\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}} \mid \ldots \mid [f(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}}]$$

**B** Ez a mátrix jó: ha $\mathbf{v} = \sum x_i \mathbf{b}_i$, akkor

$$\begin{aligned}[f]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} =& [f]_{\mathcal{B}}\mathbf{x} = \sum x_i [f(\mathbf{b}_i)]_{\mathcal{B}} = \left[\sum x_i f(\mathbf{b}_i)\right]_{\mathcal{B}} = \\ =& \left[f\left(\sum x_i \mathbf{b}_i\right)\right]_{\mathcal{B}} = [f(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}.\end{aligned}$$

Egyértelmű: az $i$. oszlop csak $C\mathbf{e}_i = C[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} = [f(\mathbf{b}_i)]_{\mathcal{B}}$ lehet.

**K** $f : K^n \to K^n$ standard mátrixa $[f]_{\mathcal{E}}$, ahol $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

**P1** Egy síkra való tükrözést könnyebb leírni egy olyan koordinátarendszerben, amelynek a tengelyei párhuzamosak, ill. merőlegesek a síkra. Pl. az $S: \ x + y - 2z = 0$ (origón átmenő) síkra való tükrözés mátrixa a $\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (0,2,1),\ (1,1,-2)\}$ bázisban:

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**P2** Mit mondhatunk egy transzformációról, ha valamely bázisban a mátrixa az előző példa $\operatorname{diag}(1,1,-1)$ mátrixa? Mindenképpen tükrözés-e?

**m** Nem, mert a harmadik bázisvektor esetleg nem merőleges az első kettő által kifeszített síkra. Viszont leírható ezzel a transzformáció hatása: egy tetszőleges $P$ pont képét úgy kapjuk meg, hogy $\mathbf{b}_3$-mal párhuzamos egyenest húzunk rajta keresztül, elmetsszük ezzel a $\operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ síkot (metszéspont: $M$), és a $PM$ távolságot még egyszer felmérjük ebben az irányban.

**F** Ha $f$ mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

akkor mi a mátrixa a $\mathcal{C} = \{\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\}$, illetve a $\mathcal{D} = \{\mathbf{b}_1, 2\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban?

**m**

$$[f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad 180^\circ\text{-os elforgatott}, \quad [f]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 7 & 16 & 9 \end{bmatrix}$$

mert pl. $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_3 \mapsto 3\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 + 9\mathbf{b}_3 = 9\mathbf{c}_1 + 6\mathbf{c}_2 + 3\mathbf{c}_3$, és a többi képe is a fordított helyen álló oszlop, megfordítva.

$\mathbf{d}_1 = \mathbf{b}_1 \mapsto \mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 + 7\mathbf{b}_3 = \mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2 + 7\mathbf{d}_3$,

$\mathbf{d}_2 = 2\mathbf{b}_2 \mapsto 2(2\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_2 + 8\mathbf{b}_3) = 4\mathbf{d}_1 + 5\mathbf{d}_2 + 16\mathbf{d}_3$

$\mathbf{d}_3 = \mathbf{b}_3 \mapsto 3\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 + 9\mathbf{b}_3 = 3\mathbf{d}_1 + 3\mathbf{d}_2 + 9\mathbf{d}_3$.

**T** **Báziscsere lineáris transzformációnál**

Ha $f : K^n \to K^n$ standard mátrixa $A$, egy $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ bázisra pedig $[f]_{\mathcal{B}} = C$, továbbá $P = [\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_n] = T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$, akkor $C = P^{-1}AP$ ($C$ az $A$-nak a $P$-vel vett konjugáltja).

**B** $P^{-1}AP[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} A T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} A [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} [f(\mathbf{v})]_{\mathcal{E}} = [f(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = C[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.
Így minden $\mathbf{x}$-re $P^{-1}AP\mathbf{x} = C\mathbf{x} \Rightarrow P^{-1}AP = C$.

**F** Írjuk fel az $y = x$ egyenesre való tükrözés mátrixát az $\{(1,1), (-2,0)\}$ bázisban!

**m** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \to$$

$$C = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**F** Lineáris-e az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, amelyre $f(x, y, z) = (x + y - z, x - y, y - 2z)$ minden $x, y, z \in \mathbb{R}$-re? Ha igen, adjuk meg a standard mátrixát, és a mátrixát a $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (2, 1, 3), (1, 2, 4)\}$ bázisban!

**m** Mivel a képvektor mindegyik komponense $x, y, z$ lineáris kombinációja, van olyan $A$ mátrix, hogy

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y - z \\ x - y \\ y - 2z \end{bmatrix}, \text{ mégpedig } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ebből következik, hogy $f$ lineáris, és $A$ a standard mátrixa.

A $P = T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ áttérési mátrix inverzét kiszámoltuk egy korábbi feladatban, és ebből $[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP =$

$$\begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -20 & -11 \\ 7 & 13 & 7 \\ -3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$