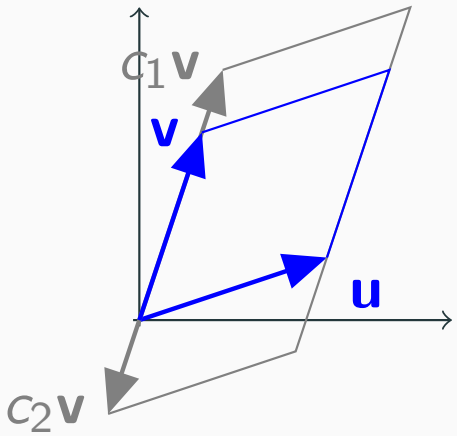
Bevezetés az algebrába 1
Determináns
Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

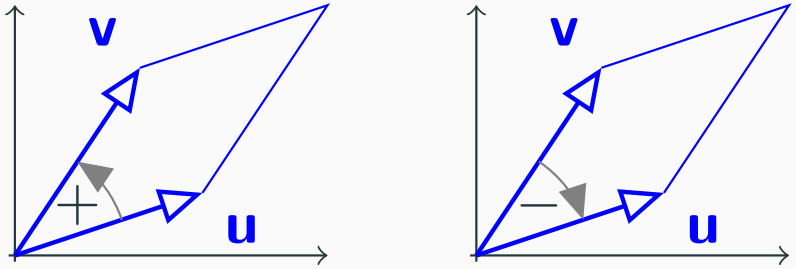
Motiváció

Parallelogramma előjeles területe

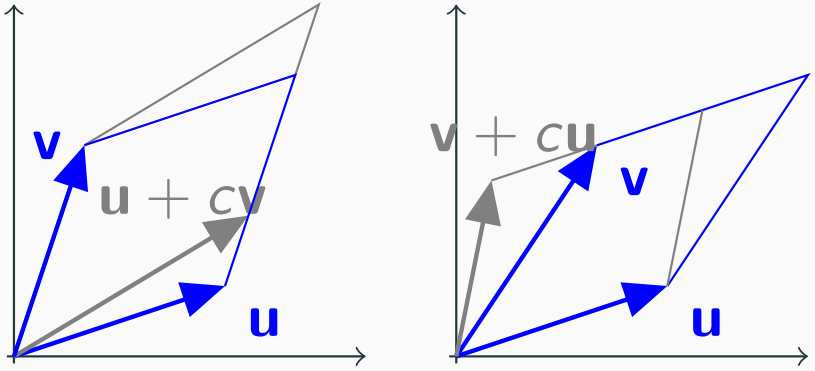
$f(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, és $f(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$



$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$



$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + c\mathbf{v}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + c\mathbf{u})$



$f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$

Írjuk a paralelogramma (n-dimenziós paralelepipedon) definiáló élvektorait egy $n \times n$-es mátrix soraiba. Ekkor az előjeles terület/térfogat lesz a mátrix determinánsa. 2×2-esre az előbbi szabályok mutatják az elemi sorműveletek hatását.

P Mi a $(2, 5)$, $(-3, 1)$ élvektorú paralelogramma területe? Jelöljük az (a, b), (c, d) élvektorokhoz tartozó értéket $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$-vel.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5/2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5/2 \\ 0 & 17/2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \tfrac{17}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5/2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$17 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 17.$$

A determináns mint sorvektorainak függvénye

D **Determináns**

Determináns: $\det : K^{n\times n} \to K$ függvény, amelyre igaz:

(D1) c-szeresére változik, ha egy sorát c-vel szorozzuk,

(D2) -1-szeresére változik, ha két különböző sorát fölcseréljük,

(D3) nem változik, ha egy sor skalárszorosát egy másik sorhoz adjuk.

(D4) $\det(I_n) = 1$.

Mj (D2) köv. a többiből (bizonyítsuk!)

Mj det a (sor)vektorok függvényeként is definiálható, pl.

$$\det(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$$

J $\det A = |A|$, $\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

T $\forall n$-re egyetlen olyan fv. van, amely kielégíti a (D1)–(D4) feltételeket.

B *Később*

K Ha A-ból A'-t elemi sorműveletek végrehajtásával kapjuk, akkor $\det A = 0 \Leftrightarrow \det A' = 0$

B (D1), (D2), (D3) miatt.

Á $A \in K^{n \times n}$-re

(1) $\det A = 0 \Leftrightarrow r(A) < n \Leftrightarrow A$ sorai összefüggők

(2) Speciálisan ha A-nak van $\mathbf{0}$ sora vagy két azonos sora, akkor $\det A = 0$.

B (2): Ha van $\mathbf{0}$ sor, az $0 \cdot \mathbf{0}$, és a 0 skalár kiemelhető.

Két egyenlő sorból elemi sorművelettel lesz egy $\mathbf{0}$ sor.

(1): Legyen $A \to \to \cdots \to R$ red. lépcsős alak. $r(A) = n \Leftrightarrow R = I_n$.

Ha $R = I_n$, akkor $\det R = 1 \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0$.

Ha $R \neq I_n \Rightarrow R$-nek van $\mathbf{0}$ sora $\overset{(2)}{\Rightarrow} \det R = 0 \Rightarrow \det A = 0$.

T **Mátrix invertálhatóságának ekvivalensei**

$A \in K^{n \times n}$-re ekvivalens:

(i) $|A| \neq 0$

(ii) A invertálható

(iii) $r(A) = n$

(iv) A redukált lépcsős alakja I_n

(v) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hom. lin. er-nek csak triviális megoldása van

(vi) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyértelműen megoldható minden $\mathbf{b} \in K^n$-re.

B $(ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$ és $(iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi)$ volt korábban.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ az előbbi állítás szerint.

Mj Az invertálható $n \times n$-es mátrixokat reguláris nak, a nem invertálhatókat szinguláris nak is nevezzük.

Determináns és Gauss-eliminació

Á Ha A Δ-mátrix (speciálisan, ha diagonális) $d_1, \ldots, d_n$ diag. elemekkel, akkor $|A| = d_1 \cdots d_n$.

B Ha $d_1 \cdots d_n = 0 \Rightarrow A$ nem invertálható $\Rightarrow \det A = 0$.
Tfh A felső Δ, és a a diag. elemek egyike sem 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{vmatrix} \overset{(D1)}{=} d_1 \cdots d_n \begin{vmatrix} 1 & & *' \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} \overset{(D3)}{=} d_1 \cdots d_n |I_n|$$

Az alsó Δ-et hasonlóan hozhatjuk I_n alakra.

Á Determináns kiszámítása: Rögzítsük az A mátrix egy felső Δ alakra hozását, ahol csak sorcseréket és $s_i \mapsto s_i + cs_j$ $(i \neq j)$ alakú elemi sorműveleteket végzünk. Ha ennek során k sorcserét végeztünk, és a felső Δ alak diag. elemei $d_1, \ldots, d_n$, akkor $\det A = (-1)^k d_1 \cdots d_n$.

B A (D2) és (D3) tulajdonságból, és a felső Δ-mátrix determinánsából.

K Ha létezik determinánsfüggvény, akkor az egyértelmű.

Mj A mátrix felső Δ-alakra hozása közben skalárt is ki lehet emelni egy-egy sorból, csak „naplózni” kell a változásokat.

P

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -15$$

F $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = ?$

Elemi mátrixok determinánsa:

- A hozzáadás sorművelettel kapott elemi mátrix determinánsa 1,
- a sorcserével kapotté -1,
- egy sor c-vel való szorzásával kapotté c,

ugyanis lyen művelettel kaphatók az 1 determinánsú egységmátrixból.

Permutációmátrixok és kígyók determinánsa

- Ha P permutációmátrix $\Rightarrow \det P = \pm 1$, mert sorcserékkel I alakra hozható. Ha ehhez k sorcserét használunk, akkor $\det P = (-1)^k$.

D Egy $A \in K^{n \times n}$ mátrix kígyó, ha $\forall$ sorban és $\forall$ oszlopban $\leqslant 1$ nemnulla eleme van.

- Ha A kígyó, amit k sorcserével diagonális alakra lehet hozni, akkor $\det A = (-1)^k d_1 \cdots d_n$, ahol d_i-k az i. sor nemnulla eleme (vagy 0, ha abban a sorban nincs nemnulla elem).

A determináns műveleti tulajdonságai

L A invertálható $\Leftrightarrow$ A felírható elemi mátrixok szorzataként.

B Ha invertálható, akkor elemi mátrixokkal való balszorzással eljutunk az I_n lépcsős alakhoz, illetve a fordított sorműveletekkel I_n-ből A-hoz $\Rightarrow A = E_k \cdots E_1 I_n = E_k \cdots E_1$ valamely $E_1, \ldots, E_k$ elemi mátrixokra. Az elemi mátrixok invertálhatók (inverzük az inverz sorműveletthez tartozó elemi mátrix) $\Rightarrow$ a szorzatuk is ilyen.

T **Mátrixműveletek és determináns**

$A, B \in K^{n\times n}$-re

(1) $|cA| = c^n|A|$, ha $c \in K$

(2) $|AB| = |A| \cdot |B|$

(3) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, ha A invertálható

(4) $|A^T| = |A|$

P $|A + B|$ nem számítható ki $|A|$-ból és $|B|$-ből:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$-re

$|A| = |B| = |A'| = |B'| = 0$, de $|A + B| = 1$, míg $|A' + B'| = 0$.

B (1): Minden sorból kiemelhető c, összesen c^n.

(2): Ha $r(A) < n$, akkor $r(AB) \leqslant r(A) < n$, tehát $|A|$ és $|AB|$ is 0.

Ha $r(A) = n$, akkor A invertálható $\Rightarrow$ a lemma szerint $A = E_k \cdots E_1$ valamely E_i elemi mátrixokra.

A (D1)–(D3) szabályok szerint $X \mapsto E_k \cdots E_1 X$ ugyanazzal a c számmal szorozza a determinánst minden $X \in K^{n\times n}$-re $\Rightarrow$ $|AB| = |E_k \cdots E_1 B| = c|B|$, és $|A| = |E_k \cdots E_1 I_n| = c|I_n| = c$, tehát $|AB| = |A| \cdot |B|$.

(3): $AA^{-1} = I \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| \overset{(2)}{=} |I| = 1$.

(4): $r(A) < n \Rightarrow r(A^T) < n \Rightarrow |A| = 0 = |A^T|$.

Ha $r(A) = n$, akkor $A = E_k \dots E_1$ elemi mátrixok szorzata.

$|E_s^T| = |E_s|$, mert ha $E_s : s_i \mapsto s_i + cs_j$, akkor $E_s^T : s_j \mapsto s_j + cs_i$, tehát ekkor $|E_s| = 1 = |E_s^T|$, és a másik két fajta elemi mátrix szimmetrikus, azaz önmaga transzponáltja.

Így $|A^T| = |(E_k \cdots E_1)^T| = |E_1^T \cdots E_k^T| = |E_1^T| \cdots |E_k^T| = |E_1| \cdots |E_k| = |E_k| \cdots |E_1| = |E_k \cdots E_1| = |A|$

T **Additivitás az i-edik sorban**

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} \qquad \text{(az } i\text{-ediket kivéve minden sor azonos)}$$

B Legyen a három mátrix A, B, C. Ha az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}$, $\mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor $|A| = |B| = |C| = 0$, ha $\mathbf{a}_i$ és $\mathbf{b}_i$ függ a többitől, ugyanez.

Tfh $\mathbf{a}_i$-k ftln-ek, így bázis. $\mathbf{b}_i = b_1\mathbf{a}_1 + b_2\mathbf{a}_2 + \ldots + b_i\mathbf{a}_i + \ldots + b_n\mathbf{a}_n$, és $\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i = b_1\mathbf{a}_1 + \ldots + b_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + (1 + b_i)\mathbf{a}_i + \ldots + b_n\mathbf{a}_n$. $\overset{(D3),(D1)}{\Longrightarrow}$ $|B| = b_i|A|$, $|C| = (1 + b_i)|A| \Rightarrow |A| + |B| = |C|$.

K A determináns minden sorában „megtartja a lin. kombinációt”.

B additivitás az i-edik sorban és az ún. homogenitás (D1) miatt!

P

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

és ezt végigcsinálhatjuk a többi sorra. $\rightsquigarrow$ Olyan determinánsok összegét kapjuk, melyeknek minden sorában $\leqslant 1$ nemnulla eleme van.

Ha két sorban ugyanott van a $\neq 0$ elem $\Rightarrow$ öf. sorok $\Rightarrow$ a determináns 0.

Elég azokat venni, ahol $\forall$ sorból és $\forall$ oszlopból egy elemet hagyunk meg (3×3-ra 6 ilyen van).

A determináns mint elemeinek függvénye

Inverziók és azok paritása

D Legyen $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ permutáció, azaz kölcsönösen egyértelmű leképezés. (Ezt jelölhetjük a $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)$ sorozattal.) A π permutációnál az i és j elemek inverzióban vannak, ha $i < j$, de $\pi(i) > \pi(j)$. A π inverzióinak számát $I(\pi)$-vel jelöljük.

P A 3241 permutációban 4 inverzió van.

F1 Maximum hány inverziója lehet $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ egy permutációjának?

F2 Adjunk meg olyan π permutációt az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon, amelyre $I(\pi) = 7$.

D Egy permutációt párosnak (páratlannak) nevezünk, ha inverzióinak száma páros (páratlan).

Mj Egy permutációmátrixhoz hozzárendelhetjük azt a permutációt, amely az egyeseinek a sorindexét az oszlopindexébe viszi, azaz amely π-re $(P)_{i\pi(i)} = 1 \ \forall i$. Ekkor $i < j$ akkor van inverzióban, ha a j. sorbeli egyes előrébb van az i. sorbelinél.

T Legyen π a P permutációmátrixhoz tartozó permutáció $\{1, \ldots, n\}$-en. Ekkor $|P| = (-1)^{I(\pi)}$.

B Elég megmutatni, hogy egy sorcsere mindig megváltoztatja az inverziók számának paritását, vagyis azok száma párosból páratlanra, páratlanból párosra változik.

Így ha egy permutációmátrix inverzióinak száma páros, akkor csak páros sok sorcserével vihető az identikus mátrixba.

Ha a két megcserélendő sor szomszédos, akkor a sorcsere pontosan eggyel változtatja az inverziók számát.

Ezután cseréljük fel az i-edik és j-edik sorokat (legyen $i < j$). Ehhez összesen $2(j - i) - 1$ szomszédos sor cseréje szükséges, ami a paritást ellenkezőjére változtatja.

K Ha A egy kígyó, amelynek az $a_{i\pi(i)}$ elemein kívül a többi eleme 0, akkor $|A| = (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$, ugyanis $I(\pi)$-vel azonos paritású sorcserével $a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$ determinánsú diagonális mátrixba vihető.

F Sorműveletek nélkül, csak inverziószámolással számítsuk ki az alábbi kígyók determinánsát! Adjuk meg az inverziószámokat is!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

m A-ra: a permutáció: 4321, $I(\pi) = \binom{4}{2} = 6$, $|A| = (-1)^6 = 1$

B-re: a permutáció: 1342, $I(\pi) = 2$,
$|B| = (-1)^2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 4 = -24$

C-re: a permutáció: 213, $I(\pi) = 1$, $|C| = (-1)^1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = -30$.

D **A determináns mint a mátrix elemeinek függvénye**

Definiáljuk az Det : $K^{n\times n} \to K$ fv.-t úgy, hogy

- kígyókon (ahol a kígyó $(i, \pi(i))$ eleme d_i minden i-re, a többi 0) $(-1)^{l(\pi)} d_1 \cdots d_n$,
- tetsz. mátrixon a belőle kiválasztható $n!$ kígyó Det determinánsának összege, azaz

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{\pi \text{ perm.}} (-1)^{l(\pi)} a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Mj Ekkor Det egyértelműen van definiálva A elemeiből.

Á A kígyókkal definiált Det függvény multilineáris, azaz ha a mátrixokat a soraik által alkotott vektor-n-eseknek tekintjük, akkor

$$\mathrm{Det}(\mathbf{s}_1, .., \mathbf{s}'_i + \mathbf{s}''_i, .., \mathbf{s}_n) = \mathrm{Det}(\mathbf{s}_1, .., \mathbf{s}'_i, .., \mathbf{s}_n) + \mathrm{Det}(\mathbf{s}_1, .., \mathbf{s}''_i, .., \mathbf{s}_n)$$

$$\mathrm{Det}(\mathbf{s}_1, .., \lambda\mathbf{s}_i, .., \mathbf{s}_n) = \lambda\,\mathrm{Det}(\mathbf{s}_1, .., \mathbf{s}_i, .., \mathbf{s}_n)$$

B Az $(\mathbf{s}_1, .., \mathbf{s}'_i + \mathbf{s}''_i, .., \mathbf{s}_n)$-hez tartozó kígyók i. sorában az $\mathbf{s}'_i + \mathbf{s}''_i$ megfelelő eleme van, tehát a determinánsa az ugyanilyen kiválasztáshoz tartozó $(\mathbf{s}_1, .., \mathbf{s}'_i, .., \mathbf{s}_n)$-beli és $(\mathbf{s}_1, .., \mathbf{s}''_i, .., \mathbf{s}_n)$-beli kígyók determinánsának összege.
$(\mathbf{s}_1, ..\lambda\mathbf{s}_i, .., \mathbf{s}_n)$-ben minden kígyó i. sorbeli eleme λ-val van szorozva, így az egész összeg is.

L Ha A-nak van két egyforma sora, akkor $\mathrm{Det}(A) = 0$.

B Legyen az i. és a j. sor egyenlő. A π-ből az $i \leftrightarrow j$ cserével kapott π'-höz rendelt kígyó determinánsa éppen a negatívja a π-hez tartozónak, és ez teljes párosítás a permutációk között, tehát az összeadandók kiejtik egymást.

T Det kielégíti a (D1)–(D4) tulajdonságokat, tehát létezik az ezekkel (egyértelműen) definiált determinánsfüggvény, és megegyezik a Det függvénnyel.

B (D1) (a c-vel szorzás hatása): A multilinearitásból.

(D3) (a hozzáadás hatása):

$\mathrm{Det}(\mathbf{s}_1, .., \mathbf{s}_i + c\mathbf{s}_j, .., \mathbf{s}_n) =$

$\mathrm{Det}(\mathbf{s}_1, .., \mathbf{s}_i, , , , \mathbf{s}_n) + c\,\mathrm{Det}(\mathbf{s}_1, .., \mathbf{s}_{i-1}, \mathbf{s}_j, \mathbf{s}_{i+1}, .., \mathbf{s}_n)$
a Det multilinearitása miatt,

és a második tag a lemma szerint 0.

(D4) (az I_n determinánsa): I kígyó, és a determinánsa $1 \cdots 1 = 1$.

(D2) (a sorcsere hatása): levezethető (D1)+(D3)-ból:

$$\begin{matrix} s_i \\ s_j \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} s_i + s_j \\ s_j \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} s_i + s_j \\ s_j - (s_i + s_j) = -s_i \end{matrix} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{matrix} s_i + s_j \\ s_i \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} s_j \\ s_i \end{matrix}$$

K A determináns kommutatív gyűrű fölötti mátrixokra is értelmezhető a kígyós definícióval, mert a $\sum_{\pi \text{ perm.}} (-1)^{I(\pi)} a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$ kifejezésben a mátrix elemeinek csak szorzata, összege és különbsége szerepel.

K Egész elemű mátrixok determinánsa is egész.

P Hány nemnulla determinánsú kígyóra bomlik az alábbi mátrix? Mi a determinánsa?

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & \ddots & b \\ b & & & a \end{bmatrix}$$

m

$$\begin{vmatrix} a & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots \\ & & & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & \ddots & b \\ b & & & 0 \end{vmatrix} = a^n + (-1)^{n-1} b^n$$

T **Sarrus-szabály**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \qquad \searrow - \swarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \\ \searrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \end{array}$$

B A 2×2-es két kígyóra bomlik, a 3×3-as $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ kígyóra. Az utóbbinál az inverziószámok:

123	231	312	321	213	132
0	2	2	3	1	1

Mj Ez nem általánosítható nagyobb méretű determinánsokra, pl. 4×4-esben a 24 kiválasztás közül csak 8 $\searrow$ vagy $\swarrow$ alakú.

P Számítsuk ki Sarrus-szabállyal: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

m $4 - 6 = -2$ és $16 + 4 - 15 - 24 + 1 - 40 = -58$.

Determináns visszavezetése kisebb méretűekre

D Az $n \times n$-es $|A|$ determináns i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$-es determináns $(-1)^{i+j}$-szeresét az $|A|$ determináns a_{ij} eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsának nevezzük, és A_{ij}-vel jelöljük.

+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+

Á Ha az $n \times n$-es $|A|$ determináns a_{ij} elemének sorában minden további elem 0, akkor

$$|A| = a_{ij} A_{ij}.$$

B Legyen az $|A|$ det. i-edik sorában az a_{ij}-n kívül minden elem 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ij} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} A_{ij},$$

mert az előbbiben minden $\neq 0$ det.-ú kígyó az $(1,1)$ helyen levő 1-gyel kezdődik.

P Számítsuk ki a következő determináns értékét! $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

m Az előző állítás oszlopokra is igaz, mert $|A| = |A^T|$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & \boxed{8} & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-8) \cdot (-1)^{2+3} \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \boxed{6} & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-8) \cdot (-5) \cdot (-1)^{2+1} \cdot 6 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-8) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot (-12) = 2880.$$

T **Kifejtési tétel**

Tetszőleges i-re kifejthető az $|A|$ determináns az i. sora vagy az i. oszlopa szerint a következő képlettel:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}, \text{ illetve } |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{ki}.$$

B Használjuk a multilinearitást az i. sorra, azaz bontsuk a determinánst olyan determinánsok összegére, ahol az i.-en kívül a többi sor változatlan, az i.-ben pedig egy kivételével a többi elem 0.

Az előző állításból a fenti első formula adódik.

A második formula A^T determinánsát adja az első formula szerint, és $|A| = |A^T|$.

P $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = ?$

m A harmadik oszlop szerint érdemes kifejteni.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

F Határozzuk meg az korábban kígyókkal kiszámolt determináns értékét kifejtési tétellel is:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \ddots & b \\ b & & & a \end{vmatrix}_{n \times n}.$$

m Az első oszlop szerint kifejtve, a két nemnulla elemhez felső, illetve alsó Δ-mátrix tartozik, így

$|A| = a \cdot a^{n-1} + (-1)^{n+1} b \cdot b^{n-1} = a^n + (-1)^{n+1} b^n.$

Mj Mivel $|A| = |A^T|$, az elemi oszlopműveletek ugyanúgy hatnak a determinánsra, mint a megfelelő elemi sorműveletek. Érdemes ezeket kombinálni a kifejtési tétellel: elemi sor- vagy oszlopműveletekkel elérjük, hogy valamelyik sorban vagy oszlopban egyetlen nemnulla elem legyen, és az a sor/oszlop szerint fejtünk ki.

F
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

m
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -7 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -10 & 8 & 3 \\ -11 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -98.$$

F $$\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}_{2n\times 2n} = ?$$

m1 Nevezzük D_n-nek ezt a determinánst. Az első, majd az utolsó sor szerint kifejtve azt kapjuk, hogy $D_n = (a^2 - b^2)D_{n-1}$. Mivel $D_1 = a^2 - b^2$, ebből indukcióval $D_n = (a^2 - b^2)^n$.

m2 Sorcserékkel és ugyanannyi oszlopcserével a mátrix úgynevezett blokkdiagonális alakra hozható:

$$\begin{vmatrix} a & b & & & \\ b & a & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & a & b \\ & & & b & a \end{vmatrix}$$

Később látni fogjuk, hogy a blokk-diagonális (sőt a blokkháromszög-) mátrixok determinánsa a diagonális blokkok determinánsának szorzata.

D x_1, x_2,... x_n számokhoz tartozó Vandermonde-mátrix

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Ennek determinánsát hívjuk Vandermonde-determinánsnak.

T **Vandermonde-determináns**

$$|V(x_1, x_2, \ldots, x_n)| = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

B $|V(x_1, x_2, \ldots, x_n)| =$ $\qquad (o_i \mapsto o_i - x_1 o_{i-1}, \quad i = n, n-1, \ldots, 2)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \ldots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{kifejtés}}{=} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \ldots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\ldots(x_n - x_1)|V(x_2, \ldots, x_n)|$$

$$= |V(x_2, \ldots, x_n)| \prod_{1<j}(x_j - x_1).$$

K $|V(x_1,\ldots,x_n)| \neq 0$, ha $x_1,\ldots,x_n \in K$ mind különbözők.

K A Vandermonde-determinánssal is bizonyíthatjuk a Lagrange-féle polinominterpolációs tételt.

Ugyanis ha $c_0 + c_1x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}$ alakban keresünk az $f(x_i) = y_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ értékekhez interpolációs polinomot, akkor az ismeretlen c_i együtthatókra éppen $V(x_1,\ldots,x_n)$ együtthatómátrixú lineáris er-t kapunk. Mivel ez a mátrix invertálható, az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.

P Mi a determinánsa az $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c+d & c^2+d^2 \end{bmatrix}$ mátrixnak?

m A multilinearitást alkalmazva az utolsó sorra a determináns felbontható:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) + (b-a)(d-a)(d-b) - ab(b-a).$$