Bevezetés az algebrába 1

A determináns alkalmazásai

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Inverz mátrix adjungáltas képlete

T **Ferde kifejtés**

Legyen $A \in K^{n\times n}$. Ekkor
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$, ha $i \neq k$ és
$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$, ha $j \neq k$,
azaz ha egy sor vagy oszlop szerinti kifejtésnél egy másik sorhoz, illetve oszlophoz tartozó előjeles aldeterminánsokat használunk, akkor 0-t kapunk.

B Tfh $i \neq k$. Ekkor $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \sum_{j=k}^{n} a'_{kj}A'_{kj}$,
ahol A-ból úgy kapjuk A'-t, hogy a k. sorába (is) az A i. sorát írjuk (ezzel a k. sorhoz tartozó aldeterminánsok nem változnak meg).
Viszont $\sum_{j=k}^{n} a'_{kj}A'_{kj} = 0$, mert A'-nek van két egyforma sora.
Az oszlopos változatban az A k. oszlopába a j. oszlop elemeit írjuk, és úgy kapjuk A'-t.

P Számítsuk ki az alábbi mátrix ferde kifejtését úgy, hogy a második sor elemeihez az első sor előjeles aldeterminánsait használjuk.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

m $3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -24 + 2 + 22 = 0.$

J $A \in K^{n\times n}$-re adj $A \in K^{n\times n}$ (A adjungáltja) az a mátrix, amelyre

$(\operatorname{adj} A)_{ij} = A_{ji}$, vagyis $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{21} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^T$.

Azaz A minden eleme helyére a hozzá tartozó előjeles aldeterminánst írjuk, aztán megtranszponáljuk a mátrixot.

P Számítsuk ki az alábbi mátrix adjungáltját! Mivel egyenlő $A \cdot \operatorname{adj} A$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

m

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & -9 & 2 \\ 8 & 2 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 8 & -1 \\ -9 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}. \qquad A \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

T **Tétel**

$A \cdot \operatorname{adj} A = |A| \cdot I$

B $(A \cdot \operatorname{adj} A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\operatorname{adj} A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} |A|, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$

a kifejtési tétel és a ferde kifejtési tétel szerint.

T **Inverz adjungáltas képlete**

Ha $A \in K^{n \times n}$, és $|A| \neq 0$, akkor $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$.

B Az előzőből következik.

P $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$

ha $ad - bc \neq 0$, és nem létezik, ha $ad - bc = 0$.

F Mi az $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzének $(3,2)$ indexű eleme?

m $|A| = 2 \cdot (-6) + 3 \cdot 8 = 12$, így

$(A^{-1})_{32} = \frac{1}{12} A_{23} = \frac{1}{12} \cdot (-2) = -\frac{1}{6}$.

Mj 3×3-as mátrix inverze még számolható fejben (det., aldet.,előjel, tükrözés). Pl. az előzőre

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 34 & -19 & -7 \\ 8 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Mj Az adjungáltas inverzformula

hátránya: sok aldeterminánst kell számolni (2×2, 3×3 elfogadható)

előnye a Gauss-eliminációval szemben: explicit képlet

elszámolásnál a hiba nem „terjed szét”

kis mátrix esetén keveset kell írni.

F Bizonyítsuk be, hogy $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$-re

$$A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n} \;\Leftrightarrow\; |A| = \pm 1$$

B ($\Rightarrow$): $|A^{-1}| \cdot |A| = |A^{-1}A| = |I| = 1$ $|A|, |A^{-1}| \in \mathbb{Z} \Rightarrow |A| \mid 1$.
($\Leftarrow$): $\operatorname{adj} A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, így $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, ha $|A| = \pm 1$.

F (Számítógépes) feladat: Hány olyan 2×2-es (ill. 3×3-as) mátrix van, hogy neki és az inverzének is minden eleme 10-nél kisebb abszolút értékű egész szám?

F Számítsuk ki az adjungáltas képlettel (próbáljuk meg fejben számolni) az alábbi A mátrix inverzét! Ellenőrizzük visszaszorzással!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{m} \quad A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & 13 & -7 \\ 3 & -11 & 4 \\ 1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Determináns és rang

T **Tétel**

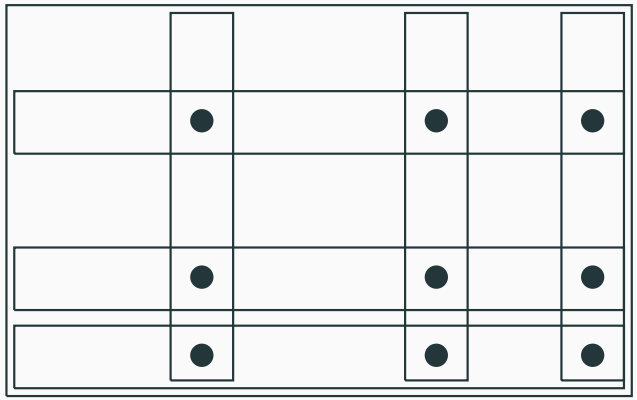
Legyen $A \in K^{m \times n}$.

Ekkor A rangja a legnagyobb olyan r szám, amelyre A-ban van $r \times r$-es nemnulla értékű aldetermináns.

(Ha ilyen nincs, akkor a rang 0.)

B Legyen $r(A) = r$. (Feltehető: $r > 0$.)

Ha $k > r$, és B egy $k \times k$-as részmátrix, akkor A-nak a B sorait adó sorai összefüggők.



$\Rightarrow$ Ez az összefüggés a sorok B-n belüli részére is érvényes.

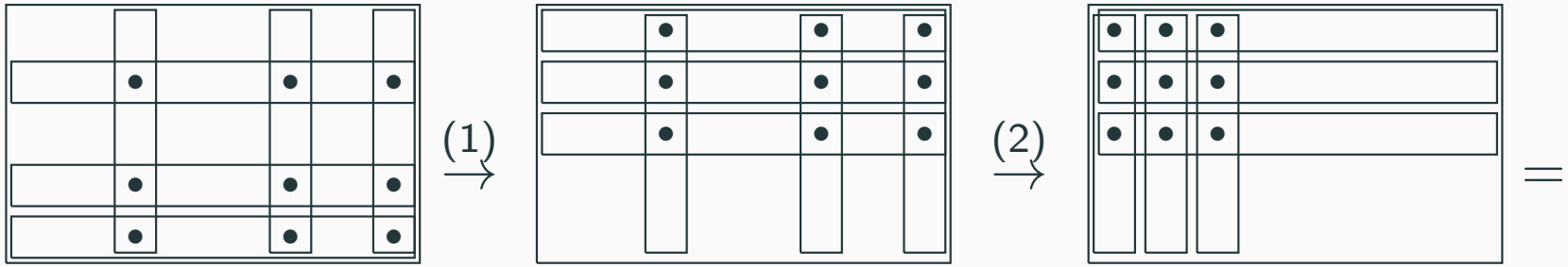
$\Rightarrow |B| = 0$.

Az kell még, hogy A-nak van $r \times r$-es $\neq 0$ aldeterminánsa.

A-nak van r független sora és r független oszlopa.

Legyen B az ezek metszeteiből alkotott részmátrix.

Sorcserékkel és oszlopcserékkel:



$$\begin{array}{|c|c|}\hline B & * \\ \hline * & * \\ \hline \end{array} \xrightarrow[\text{elemi sorműveletek}]{(3)} \begin{array}{|c|c|}\hline B & * \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

(1) az r független sort felülre viszi, az oszlopok függetlenségét megtartja.

(2) az r független oszlopot balra viszi, a felső r sor ftln-ségét megtartja.

Mivel az első r sor max. ftln rendszer, lehet vele lefelé nullázni (3)-mal.

Az új első r oszlop továbbra is ftln. $\Rightarrow$ B oszlopai ftln-ek $\Rightarrow$ $|B| \neq 0$.

P Mi a rangja az alábbi A mátrixnak?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

m $r(A) \leqslant 3$, mert $2s_2 = s_4$. Van 3×3-as $\neq 0$ aldetermináns, pl.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1+3) = -4.$$

Persze Gauss-eliminációval is kiszámolhatjuk!

Cramer-szabály

J $A_{i,\mathbf{b}} = [(A)_{*1}, \ldots, A_{*(i-1)}, \mathbf{b}, A_{*(i+1)}, \ldots, A_{*n}]$

(az i. oszlopot lecseréljük a $\mathbf{b}$ oszlopvektorra).

T **Cramer-szabály**

Tfh $A \in K^{n\times n}$ és $|A| \neq 0$.

Ekkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van, és az $\mathbf{x}$ megoldás komponensei $x_i = \frac{\det A_{i,\mathbf{b}}}{\det A}$.

B Egyértelmű megoldás van, ✓

és az $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Felhasználva az inverz adjungáltas képletét,

$$x_i = (A^{-1})_{i*}\mathbf{b} = \sum_{t=1}^{n} (A^{-1})_{it} b_t = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{|A|} A_{ti} b_t,$$

és $\sum_{t=1}^{n} A_{ti} b_t$ éppen az $A_{i,\mathbf{b}}$ determinánsának az i. oszlop szerinti kifejtése.

P Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Cramer-szabállyal!

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 5y & = & 4 \\ 5x & + & 3y & = & 6 \end{array}$$

m

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-18}{-19} = \frac{18}{19}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{-19} = \frac{-8}{-19} = \frac{8}{19}$$

Blokkmátrixok

D Blokkmátrix: mátrix téglalapráccsal való felosztása.

P $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$ felírható $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ alakban,

ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B = [3]$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ és $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Á Műveletek blokkmátrixokkal

(1) Ha A és B azonos méretű és felosztású blokkmátrixok, akkor $A + B$ kiszámítható a blokkok páronkénti összeadásával.

(2) Ha $A \in K^{k \times m}$, $B \in K^{m \times n}$, és A oszlopainak sávokba osztása megfelel B sorainak sávokba osztásának, akkor AB is blokkmátrix, és az (i, j) indexű blokkja $\sum_t A_{it} B_{tj}$ (ahol A_{it} most az A (i, t)-blokkját, B_{tj} a B (t, j)-blokkját jelöli).

B (1) ✓

(2): Ha A u. sora az i. blokksorban, B v. oszlopa a j. blokkoszlopban van, akkor az $(AB)_{uv} = \sum_t a_{ut} b_{tv}$ összeg felbomlik az i. blokksor és j. blokkoszlop megfelelő mátrixai u-hoz tartozó sora és v-hez tartozó oszlopa szorzatainak összegére.

P Számítsuk ki az alábbi mátrixszorzatot felosztás nélkül, illetve 2×2-es blokkokra osztott blokkmátrix alakban!

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ \hline 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ \hline -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_2 - B_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ \hline -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{array}\right]$$

D Blokkdiagonális mátrix: $n \times n$-es mátrix, ahol a sorok és az oszlopok ugyanúgy vannak sávokba osztva, és a főátló menti blokkokon kívül minden más blokk 0.

Blokk-Δ-mátrix: az előbbihez hasonló felosztású, ahol a diag. blokkok alatt, vagy fölött csak 0 blokkok vannak (felső, ill. alsó Δ).

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \\ 0 & D_2 & \\ & & D_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} D_1 & * & \\ 0 & D_2 & \\ & & D_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \\ * & D_2 & \\ & & D_3 \end{bmatrix}$$

T Ha A blokk-Δ mátrix $D_1, \ldots, D_k$ diag. blokkokkal, akkor $|A| = |D_1| \cdots |D_k|$.

B Minden $\neq 0$ kígyó D_i-k kígyóiból tevődik össze, és inverziók is csak a blokksávokon belül vannak, tehát az inverziószám is összeadódik.

P Az alábbi mátrix determinánsát korábban kiszámoltuk rekurzióval, de ha sor- és oszlopcserékkel blokkdiagonális alakra hozzuk, akkor az előbbi tételből is kijön, hogy a determinánsa $(a^2 - b^2)^n$.

$$\begin{bmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{bmatrix}_{2n\times 2n}$$

P Ha $A, B, C, D \in K^{n\times n}$, ahol $|A| \neq 0$, és $AC = CA$, akkor az $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ mátrixra $|M| = |AD - CB|$.

B $XM = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline CA^{-1} & -I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & CA^{-1}B - D \end{array}\right] \Rightarrow$
$(-1)^n|M| = |XM| = |A|\cdot|CA^{-1}B - D| = |ACA^{-1}B - AD| = |CB - AD|$,
mivel $AC = CA$, így $|M| = (-1)^n|CB - AD| = |AD - CB|$.