Bevezetés az algebrába 1

$\mathbb{R}^n$ mint euklideszi tér

Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

D Az $\mathbb{R}^n$ vektortér az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \sum a_i b_i$ standard skalárszorzattal n-dimenziós valós Euklideszi tér.

($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ helyett egyszerűen $\mathbf{ab}$-t, $\mathbf{aa}$ helyett $\mathbf{a}^2$-et is írhatunk.)

A skalárszorzat tulajdonságai:

- bilineáris, azaz mindkét változójában lineáris:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{a} + \mathbf{a}')\mathbf{b} = \mathbf{ab} + \mathbf{a}'\mathbf{b},\\
&(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab}),\\
&\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{b}') = \mathbf{ab} + \mathbf{ab}',\\
&\mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{ab}), \text{ ha } \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

- szimmetrikus: $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$
- pozitív definit: $\mathbf{aa} > 0$, ha $\mathbf{a} \neq 0$.

Mj $\mathbf{0a} = \mathbf{a0} = 0$ következik a bilinearitásból, így $\mathbf{a}^2 = 0$, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

D $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ($\mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{b}$-re), ha $\mathbf{ab} = 0$.

$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{aa}} = \sqrt{\sum a_i^2}$ az $\mathbf{a}$ vektor hossza vagy abszolút értéke.

K $\mathbb{R}^n$-ben csak a $\mathbf{0}$ merőleges önmagára, azaz $|\mathbf{a}| = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Mj K^n-ben a standard skalárszorzat szintén szimmetrikus, de megtörténhet $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$-ra is, hogy $\mathbf{a} \perp \mathbf{a} = 0$.

Pl. $\mathbb{Z}_2^2$-ben $(1,1) \perp (1,1)$.

T **Pitagorasz-tétel**

Ha $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, akkor $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.

B $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{aa} + \mathbf{bb} + 2\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$, mivel $\mathbf{ab} = 0$.

Á $\mathbf{a}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \exists!\ \mathbf{v}', \mathbf{v}''$: $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$, $\mathbf{v}' \parallel \mathbf{a}$ és $\mathbf{v}'' \perp \mathbf{a}$.

B $\exists$: $\mathbf{v}' := \frac{\mathbf{av}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$, $\quad \mathbf{v}'' := \mathbf{v} - \mathbf{v}'$.

$\mathbf{av}'' = \mathbf{a}\left(\mathbf{v} - \frac{\mathbf{av}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}\right) = \mathbf{av} - \frac{\mathbf{av}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{aa} = \mathbf{av} - \mathbf{av} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}'' \perp \mathbf{a}$.

$!$: $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}'' = \mathbf{u}' + \mathbf{u}''$ két ilyen felbontás.

$\Rightarrow \mathbf{v}' - \mathbf{u}' = \mathbf{u}'' - \mathbf{v}''$ párhuzamos $\mathbf{a}$-val és merőleges is $\mathbf{a}$-ra, tehát $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{v}' - \mathbf{u}'$ -re $\lambda\mathbf{aa} = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \mathbf{v}' = \mathbf{u}'$ és $\mathbf{v}'' = \mathbf{u}''$.

D Az előző állításban szereplő (egyértelmű) $\mathbf{v}'$ vektor a $\mathbf{v}$ vektor merőleges vetülete $\mathbf{a}$-ra.

K Egy $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ vektorra való $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{a}\mathbf{v}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$ merőleges vetítés lineáris transzformáció $\mathbb{R}^n$-en, amelynek standard mátrixa $\frac{1}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ (ahol $\mathbf{a}$-t oszlopvektorként írjuk).

B $\frac{1}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}\mathbf{a}^T\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}[\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}] = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} = \mathbf{v}'$ az előző állítás szerint.

Á Ha $\mathbf{v}'$ a $\mathbf{v}$ merőleges vetülete $\mathbf{a}$-ra, akkor $|\mathbf{v}'| \leqslant |\mathbf{v}|$.

B $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$, $\mathbf{v}' = \lambda\mathbf{a}$, $\mathbf{v}'' \perp \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{v}' \perp \mathbf{v}''$

$\Rightarrow$ a Pitagorasz-tétel szerint $|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{v}'|^2 + |\mathbf{v}''|^2 \geqslant |\mathbf{v}'|^2$.

T **Cauchy–Schwarz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség**

$|\mathbf{ab}| \leqslant |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$

B Ha $\mathbf{a} = \mathbf{0} \Rightarrow |\mathbf{ab}| = |\mathbf{0}| = 0$ és $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| = 0 \cdot |\mathbf{b}| = 0$

Ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{b}'$ a $\mathbf{b}$ vetülete $\mathbf{a}$-ra, akkor $\left|\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}\right| = |\mathbf{b}'| \leqslant |\mathbf{b}|$, de $|\lambda\mathbf{a}|^2 = (\lambda\mathbf{a})(\lambda\mathbf{a}) = \lambda^2|\mathbf{a}|^2$ miatt $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$, így $\frac{|\mathbf{ab}|}{|\mathbf{a}|^2}|\mathbf{a}| \leqslant |\mathbf{b}|$, azaz $|\mathbf{ab}| \leqslant |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.

D $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szöge $0 \leqslant \varphi \leqslant 180°$, ha $\cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$.

($\exists!\varphi$, ui. CSB miatt $\left|\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\right| \leqslant 1$.)

P Határozzuk meg az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorok hosszát, szögét, és $\mathbf{a}$ vetületét $\mathbf{b}$-re, ha $\mathbf{a} = (1, 0, 1, -1)$ és $\mathbf{b} = (-2, 1, 0, 1)$.

m $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{6}$.

$\frac{\mathbf{ab}}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 135°$.

$\mathbf{a}' = \frac{-3}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} = -\frac{1}{2}(-2, 1, 0, 1) = (1, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

D Tekintsük a K^n vektorteret tetszőleges K testre az $\mathbf{ab} := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ standard skalárszorzattal.

Itt is definiálhatjuk a merőlegességet: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, ha $\mathbf{ab} = 0$.

$\mathcal{V} \leqslant K^n$-re $\mathcal{V}^\perp = \{\mathbf{w} \in K^n \mid \mathbf{vw} = 0 \ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$ a $\mathcal{V}$ altér merőlegese.

Nyilván $\mathcal{V} = \operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$-ra $\mathbf{w} \in \mathcal{V}^\perp \Leftrightarrow \mathbf{a}_i\mathbf{w} = 0 \ \forall i$

P $\mathcal{V} = \operatorname{span}((1,2,0,1),\ (1,1,1,1)) \leqslant \mathbb{R}^4$-re adjuk meg $\mathcal{V}^\perp$ egy bázisát!

m $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2s - t \\ s \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mathcal{V}^\perp$ bázisa $\{(-2,1,1,0),\ (-1,0,0,1)\}$.

Á $\mathcal{V} \leqslant K^n$-re (1) $\dim \mathcal{V}^\perp = n - \dim \mathcal{V}$

(2) $(\mathcal{V}^\perp)^\perp = \mathcal{V}$.

B (1): Legyen $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ bázis $\mathcal{V}$-ben, és legyenek az $A \in K^{r \times n}$ mátrix sorai $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$.

Ekkor $\mathcal{N}(A) = (\mathit{sorok})^\perp = \mathcal{S}(A)^\perp = \mathcal{V}^\perp$, és a dimenziótételből

$$\dim \mathcal{V}^\perp = \dim \mathcal{N}(A) = n - \dim \mathcal{S}(A) = n - \dim \mathcal{V}.$$

(2): $(\mathcal{V}^\perp)^\perp \geqslant \mathcal{V}$, mert $\forall\ \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ merőleges $\forall\ \mathbf{w} \in \mathcal{V}^\perp$ vektorra.

De $\dim(\mathcal{V}^\perp)^\perp = n - \dim \mathcal{V}^\perp = n - (n - r) = r = \dim \mathcal{V}$, így $(\mathcal{V}^\perp)^\perp = \mathcal{V}$.

D Legyen $\mathcal{U}, \mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$. Ekkor az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ alterek összege

$\mathcal{U} + \mathcal{W} := \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{U},\ \mathbf{w} \in \mathcal{W}\} \leqslant \mathcal{V}$

(Altér, mert $(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + (\mathbf{u}' + \mathbf{w}') = (\mathbf{u} + \mathbf{u}') + (\mathbf{w} + \mathbf{w}')$ és $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{w}$ $\mathcal{U} + \mathcal{W}$-beliek.)

D **Direkt összeg**

$\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ alterek direkt összege:

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}, \text{ ha } \begin{cases} \mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}, \text{ és} \\ \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = 0 \ (= \{\mathbf{0}\}). \end{cases}$$

(Úgy is mondjuk, hogy $\mathcal{W}$ direkt kiegészítője $\mathcal{U}$-nak $\mathcal{V}$-ben.)

Á Az $\mathcal{U}, \mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ alterekre ekvivalens:

(i) $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

(ii) $\forall\ \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ egyértelműen írható $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ $(\mathbf{u} \in \mathcal{U},\ \mathbf{w} \in \mathcal{W})$ alakban.

(iii) Ha $\mathcal{B}$ az $\mathcal{U}$-nak, $\mathcal{C}$ a $\mathcal{W}$-nek bázisa, akkor $\mathcal{B} \dot\cup \mathcal{C}$ bázisa $\mathcal{V}$-nek.

B $(i) \Rightarrow (ii)$: Felírható: $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$. Egyértelműen: $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{u}' + \mathbf{w}'$ $\Rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{w}' - \mathbf{w} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{w}' - \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$, mert $\forall \mathbf{v}$ felírható $\mathbf{u} + \mathbf{w}$-ként.

$\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = 0$, mert ha $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v}$ kétféle felírás. ↯

$(i) \Rightarrow (iii)$: $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$, mert $\mathbf{0} \notin \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$.

$\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ generátorrendszer, mert $\forall \mathbf{v}$: $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} = \sum \lambda_i \mathbf{b}_i + \sum \mu_j \mathbf{c}_j$.

$\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ ftln, mert ha $\sum \lambda_i \mathbf{b}_i + \sum \mu_j \mathbf{c}_j = \mathbf{0} \Rightarrow$

$\sum \lambda_i \mathbf{b}_i = -\sum \mu_j \mathbf{c}_j \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = 0 \Rightarrow \sum \lambda_i \mathbf{b}_i = -\sum \mu_j \mathbf{c}_j = \mathbf{0} \Rightarrow$

$\lambda_i = \mu_j = 0 \ \forall i, j$, mivel $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ftln-ek.

$(iii) \Rightarrow (i)$: $\forall \mathbf{v}$ felírható $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$-ből, így $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$.

Az $\mathcal{U} + \mathcal{W}$-beli $\mathbf{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$-re $\mathbf{v} = \sum \lambda_i \mathbf{b}_i = \sum \mu_j \mathbf{c}_j \Rightarrow$

$\sum \lambda_i \mathbf{b}_i - \sum \mu_j \mathbf{c}_j = \mathbf{0}$.

De $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ ftln $\Rightarrow \forall \lambda_i = 0$, $\forall \mu_j = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

K Ha $\mathcal{U}, \mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$, és $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = 0$, akkor $\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, és $\dim \mathcal{U} + \mathcal{W} = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W}$, ui. a bázisaik uniója bázisa $\mathcal{U} + \mathcal{W}$-nek.

P $\mathbb{R}^3$-ben egy $\mathbf{0} \in S$ sík és egy vele nem párhuzamos $\mathbf{0} \in e$ egyenes egymás direkt kiegészítői: csak a $\mathbf{0}$-ban metszik egymást, és a dimenzióik összege 3, tehát az előbbi következmény szerint kifeszítik a teljes teret.

T **A lineáris algebra alaptétele**

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$-re $\mathcal{S}(A)$ és $\mathcal{N}(A)$ merőleges kiegészítői egymásnak, azaz

(1) $\mathcal{S}(A)^\perp = \mathcal{N}(A)$,

(2) $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{S}(A)$,

(3) $\mathbb{R}^n = \mathcal{S}(A) \oplus \mathcal{N}(A)$.

B (1) : $\mathcal{N}(A)$ definíciójából.

(2) : $\mathcal{N}(A)^\perp = (\mathcal{S}(A)^\perp)^\perp = \mathcal{S}(A)$.

(3) : $\mathcal{S}(A) \cap \mathcal{N}(A) = 0$, mert $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{N}(A) \Rightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Így $\mathcal{S}(A) + \mathcal{N}(A) = \mathcal{S}(A) \oplus \mathcal{N}(A)$, és a dimenziója $\dim \mathcal{S}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = \dim \mathcal{O}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = n$ az előző következmény és a dimenziótétel szerint.

Tehát $\mathcal{S}(A) \oplus \mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^n$.

P Egy origón átmenő sík merőleges kiegészítője csak a normálegyenese, de végtelen sok különböző direkt kiegészítője van a síknak.

K $\mathcal{V} \leqslant \mathbb{R}^n$-re $\mathcal{V}$ és $\mathcal{V}^\perp$ merőleges kiegészítői egymásnak $\mathbb{R}^n$-ben.

B Vegyük a $\mathcal{V}$ vektortér egy bázisát, és írjuk ennek elemeit egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix soraiba. Ekkor $\mathcal{V} = \mathcal{S}(A)$, és $\mathcal{V}^\perp = \mathcal{N}(A)$.

P Általános K^n-ben ez nem igaz, pl. $\mathbb{Z}_2^2$-ben $\mathcal{V} = \operatorname{span}((1,1))$-re $\mathcal{V}^\perp = \mathcal{V}$, így $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\perp \neq 0$.

T **Sortérbe eső megoldás**

$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$-re

(1) Ha az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer konzisztens, akkor pontosan egy megoldása esik A sorterébe. Legyen ez a megoldás $\mathbf{v}_0$.

(2) Ez a $\mathbf{v}_0$ az egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű megoldása.

(3) $\forall$ megoldás felírható $\mathbf{v}_0 + \mathbf{h}$ alakban, ahol $\mathbf{h}$ a homogén $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer egy megoldása.

B (1): $\exists \mathbf{v}_0$: Ha $\mathbf{v}$ egy megoldás $\Rightarrow$ a lineáris algebra alaptétele szerint $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{h}$, ahol $\mathbf{u} \in \mathcal{S}(A)$ és $\mathbf{h} \in \mathcal{N}(A)$, azaz $\mathbf{h}$ megoldása a homogén $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek.

$\Rightarrow$ $\mathbf{v} - \mathbf{h}$ is megoldása $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$-nek, és $\mathbf{v} - \mathbf{h} = \mathbf{u} \in \mathcal{S}(A)$. Így $\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}$ megfelel.

!: Ha $\mathbf{w} \in \mathcal{S}(A)$ szintén mo.-a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$-nek, akkor $\mathbf{v}_0 - \mathbf{w} \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{S}(A) = 0$.

(3): Az inhomogén és a homogén er. megoldásai közötti kapcsolatból.

(2): Tetszőleges megoldás $\mathbf{v}_0 + \mathbf{h}$ alakú, és erre $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{h}$. Így a Pitagorasz-tételből $|\mathbf{v}_0 + \mathbf{h}|^2 = |\mathbf{v}_0|^2 + |\mathbf{h}|^2 \geqslant |\mathbf{v}_0|^2$, és

$= \Leftrightarrow \mathbf{h} = \mathbf{0}$. Tehát $\mathbf{v}_0$ az egyetlen legkisebb abszolút értékű megoldás.

P Keressük meg az alábbi kibővített mátrixhoz tartozó egyenletrendszer sortérbe eső megoldását. Írjuk fel ebből az összes megoldást!

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

m $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & -2 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1-s+t \\ -1-2s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{N}(A) = \operatorname{span}((-1,-2,1,0),(1,-1,0,1)$, és $\mathcal{S}(A) = \mathcal{N}^{\perp}$.

Tehát az eredeti egyenletekhez (azok helyett elég a redukált lépcsős alak nemnulla egyenleteit használni), hozzá kell tennünk a

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

egyenleteket, hogy a sortérbe eső megoldást megkeressük.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & -1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & 11 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 7/17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -11/17 \end{array}\right]$$

Az összes megoldás

$(\frac{7}{17}, -\frac{4}{17}, -\frac{1}{17}, -\frac{11}{17}) + s(-1, -2, 1, 0) + t(1, -1, 0, 1).$