Bevezetés az algebrába 1
Kombinatorikai alkalmazások

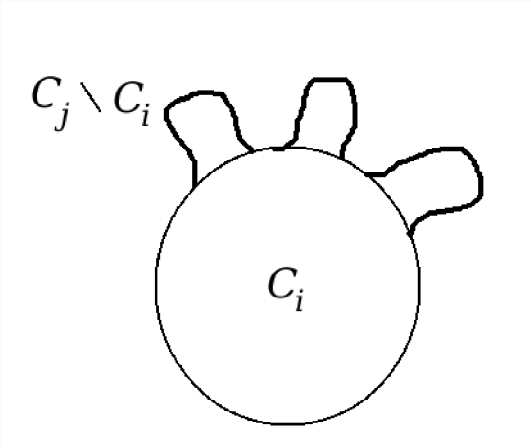
Wettl Ferenc diáinak felhasználásával

Fisher-egyenlőtlenség

T Fisher-egyenlőtlenség

Legyenek $C_1, \ldots, C_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$ különbözők, és tegyük fel, hogy valamely $c > 0$-ra $|C_i \cap C_j| = c$ $(\forall i \neq j)$. Ekkor $k \leqslant n$.

B 1. eset: $\exists i$: $|C_i| = c$. Ekkor:



$\implies n \geqslant |C_i| + (k-1) \geqslant k.$

2. eset: $\forall i$ $|C_i| = c + a_i$, $a_i > 0$. $X \subseteq \{1, \ldots, n\}$ karakterisztikus vektora n-dimenziós 0-1-vektor, $(x_1, \ldots, x_n)$, ahol $x_i = 1 \iff i \in X$.

Az $M \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix i. sora a C_i halmazhoz tartozó karakterisztikus vektor. Ekkor

$$A = MM^T = \begin{bmatrix} c + a_1 & c & c & \dots & c \\ c & c + a_2 & c & \dots & c \\ \vdots & & \ddots & & \\ c & & & & c + a_n \end{bmatrix}_{k \times k}, \text{ ui. } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |X \cap Y|$$

Tudjuk: $r(A) \leqslant r(M) \leqslant n$.

Belátjuk: $|A| \neq 0$, és ebből következni fog, hogy $r(A) = k$, és így $k \leqslant n$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & c+a_1 & c & \dots & c \\ 0 & c & c+a_2 & \dots & c \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & c & \dots & & c+a_n \end{vmatrix}_{(k+1)\times(k+1)} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -c & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ -c & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -c & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\frac{c}{a_1}+\dots+\frac{c}{a_n} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (1+\tfrac{c}{a_1}+\dots+\tfrac{c}{a_n}) \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_n > 0, \text{ mert } c, a_1, \dots, a_n > 0.$$

Halmazrendszerek paritási feltételekkel

Maximum hány klub lehet egy n lakosú városban, ha előírás az, hogy

- minden klub tagsága különböző (de lehet 0 tagú klub is),
- bármely két különböző klubnak páros sok közös tagja van,
- minden klub létszáma

a) páratlan? b) páros?

T Páratlanváros

Legyenek $C_1, \ldots, C_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$ különbözők, és tegyük fel, hogy minden $|C_i|$ páratlan, és minden $|C_i \cap C_j|$ $(i \neq j)$ páros. Ekkor $k \leqslant n$.

B Ugyanúgy, mint a Fisher-egyenlőtlenségnél definiáljuk az M mátrixot, amelynek sorai a C_i halmazok karakterisztikus vektorai.

Tekintsük M-et a $\mathbb{Z}_2$ test fölötti mátrixnak.

Ekkor $MM^T = I_k$, így $k = r(I_k) \leqslant r(M) \leqslant n$.

Mj Másképp: a klubokat tekinthetjük $\mathbb{Z}_2^n$ vektorainak, és a feltétel azt jelenti, hogy ezek merőlegesek egymásra, de önmagukra nem. Ebből könnyen bizonyítható, hogy lineárisan függetlenek.

T Párosváros

Legyenek $C_1, \ldots, C_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$ különbözők, és tegyük fel, hogy minden $|C_i|$ páros, és minden $|C_i \cap C_j|$ $(i \neq j)$ is páros. Ekkor $k \leqslant 2^{[n/2]}$.

B Feleltessük meg a kluboknak a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ karakterisztikus vektorokat mint a $\mathbb{Z}_2^n$ elemeit. Ekkor $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j \ \forall\, i, j$.

Legyen $\mathcal{W} = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$. A feltételek miatt $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{W}^\perp$, továbbá tudjuk, hogy $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathbb{Z}_2^n = n$.

$\Rightarrow 2 \cdot \dim \mathcal{W} \leqslant \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = n$

$\Rightarrow \dim \mathcal{W} \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. $\Rightarrow k \leqslant |\mathcal{W}| = 2^{\dim \mathcal{W}} \leqslant 2^{[n/2]}$.

Mj Mindkét felső korlát éles: Páratlanvárosban csupa 1-tagú klubból lehet n darab, Párosvárosban pedig, ha például a város csupa házaspárból áll (esetleg $+1$), és a házaspárok összes lehetséges halmaza klubot alakít, akkor $2^{n/2}$ klub lesz ($2^{[n/2]}$).