Gyakorló feladatok

1. Mennyi a rangja annak a valós $n \times n$-es mátrixnak, amelynek az elemei sorfolytonosan leolvasva $1, 2, \ldots, n^2$?

2. Mennyi lehet annak az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésnek a rangja, amelyre $0 \neq \operatorname{Im} f \leq \operatorname{Ker} f$? Adjunk példát ilyen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mátrixleképezésre!

3. Tekintsük a következő mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki a BC, CB, $5A$, $A + D$, AD, DA, $D^T D + A$ mátrixkifejezések közül azokat, amelyek értelmezve vannak!

4. Keressünk olyan 2×2-es és 3×3-as C valós mátrixokat, melyekre: $C^2 = 0$, de $C \neq 0$.

5. Mi történik egy $n \times n$-es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi mátrixokkal megszorozzuk?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

6. Igazak-e minden $n \times n$-es A, B mátrixra az alábbi egyenlőségek?

a) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

b) $(A + I)(A - I) = A^2 - I^2$

c) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

d) $(AB)^T = A^T B^T$

7. Írjuk fel az alábbi A mátrix bázisfelbontását, majd ezt felhasználva bontsuk fel a mátrixot $r(A)$ darab 1 rangú mátrix összegére!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

Beadási határidő: november 16.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Legyen $f : V \to W$ lineáris transzformáció.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\operatorname{Ker} f = 0$, akkor f a V minden független részhalmazát a W független részhalmazába viszi.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $\operatorname{Im} f = W$, akkor f a V minden generátorrendszerét a W generátorrendszerébe viszi.

2. Határozzuk meg az alábbi A mátrix rangját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix}$$

3. Összesen legalább hány nemnulla eleme van az $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixoknak, ha AB-ben nincs nulla elem?

4. Keressük meg az összes olyan 2×2-es valós X mátrixot, amelyik felcserélhető az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal! (Írjuk át az $AX = XA$ mátrixegyenletet az X elemeire vonatkozó lineáris egyenletrendszerré!)

5. Határozzuk meg az alábbi A mátrix bázisfelbontását, és ennek segítségével bontsuk fel az A mátrixot $r(A)$ darab 1 rangú mátrix összegére!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

6. Hogyan változhat a mátrix rangja, ha egyetlen eleméhez 1-et hozzáadunk? Adjunk példát mindegyik esetre!

7*. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix rangja n. Mely $\mathbf{v}$ vektorokra igaz, hogy az A bármely sorához hozzáadhatjuk $\mathbf{v}$ alkalmas skalárszorosát úgy, hogy a mátrix rangja csökkenjen?