Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét, ha van!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket, ha lehet! A, B, C, D az előző feladatban szereplő mátrixok.

a) $CX = D$ b) $BX = C$ c) $XB = M$, ahol $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ d) $XB = AM$

3. Lineárisak-e a következő leképezések? Ha igen, mi a standard mátrixuk?

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + 1,\ 2,\ 3)$
b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + y,\ -y,\ 2x)$
c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|$
d) az $\mathbb{R}^3$ $90°$-os forgatása a z tengely körül
e) az $x + y - 2z = 0$ síkra való tükrözés
f) $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ahol f az $y = x$ egyenesre, g pedig az x tengelyre való tükrözés

4. Tekintsük a $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (2, 1, 3), (1, 2, 4)\}$ bázist $\mathbb{R}^3$-ben. Mi a $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ és a $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ áttérési mátrix? Adjuk meg a $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B}$ bázisra nézve!

5. Ha az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

akkor mi a mátrixa a $\mathcal{C} = \{\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\}$, illetve a $\mathcal{D} = \{\mathbf{b}_1, 2\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban?

6. Írjuk fel az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban!

a) Az $y = x$ egyenesre való tükrözés az $\mathbb{R}^2$ standard $\mathcal{E}$, továbbá a $\mathcal{B} = \{(1, 1), (-1, 1)\}$, illetve $\mathcal{C} = \{(1, 1), (-2, 0)\}$ bázisában;
b) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, a $\mathcal{B} = \{(1, 2), (1, 1)\}$ bázisban;
c) az $S :\ x-2y+z = 0$ síkra való merőleges vetítés egy tetszőleges olyan bázisban, amelynek elemei mind párhuzamosak az S síkkal vagy merőlegesek rá, illetve a standard bázisban.

7. Írjuk fel alkalmas bázisban, majd a standard bázisban is a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ irányvektorú, origón átmenő egyenes körüli $90°$-os forgatás mátrixát!

Házi feladatok

Beadási határidő: november 23.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Oldjuk meg az $XA = B$ és az $AY = C$ mátrixegyenletet, továbbá számítsuk ki az $A^T A^{-2}$ mátrix inverzét, ha A az előző feladatban szereplő mátrix, és

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Adjuk meg annak a lineáris transzformációnak a standard mátrixát, amelyet úgy kapunk, hogy először az $x = z$ síkra tükrözünk, majd a kapott vektort elforgatjuk a z tengely körül $+90°$-kal!

4. Tekintsük a $\mathcal{B} = \{(1,0,2,0),(0,1,3,2),(-1,2,0,3),(1,2,1,2)\}$ bázist $\mathbb{R}^4$-ben. Mi a $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ és a $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ áttérési mátrix? Adjuk meg a $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B}$ bázisra nézve!

5. Ha az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

akkor mi a mátrixa a $\mathcal{C} = \{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, -\mathbf{b}_3\}$ bázisban?

6. Írjuk fel az $f(x, y.z) = (x-y+z,\ -2x+z,\ x+y)$ lineáris transzformáció standard mátrixát, és a $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(2,-1,2),(0,1,1)\}$ bázis szerinti mátrixát!

7*. Bizonyítsuk be, hogy K^n minden lineáris transzformációjához van K^n-nek olyan bázisa, amelyben a transzformáció mátrixának első oszlopában legföljebb egy nemnulla elem van, és az az első vagy a második elem. Mutassunk példát $\mathbb{R}^2$-ben olyan transzformációra, amelynek a kettő közül csak az egyik, illetve csak a másik típusú mátrixa van.