Gyakorló feladatok

1. *Horner-módszerrel helyettsítsük be* 5*-öt a* $p(x) = x^5 - 3x^2 + x + 3$ *polinomba!*

Megoldás:

	1	0	0	−3	1	3
5	1	5	25	122	611	3058

$\Rightarrow \qquad p(5) = 3058$

2. *Adjuk meg* 120201_3*-at tízes számrendszerben Horner módszerrel!*

Megoldás:

	1	2	0	2	0	1
3	1	5	15	47	141	424

$\Rightarrow \qquad 120201_3 = 424_{10}.$

3. *a) Váltsuk át* 26*-ot* $10, 16, 8, 4, 2, 5, 26$ *alapú számrendszerbe!*

b) Váltsuk át 1001*-et* 2*-es,* 8*-as és* 16*-os számrendszerbe!*

Megoldás: a) Ismételt leosztásokkal, és a maradékok fordított sorrendben való felírásával:

26	10
2	6
0	2

26	16
1	10
0	1

26	8
3	2
0	3

26	4
6	2
1	2
0	1

26	2
13	0
6	1
3	0
1	1
0	1

26	5
5	1
1	0
0	1

26	26
1	0
0	1

26 a megadott számrendszerekben:

$$26_{10} = 1A_{16} = 32_8 = 122_4 = 11010_2 = 101_5 = 10_{26}.$$

b) A b alapú számrendszerből b^m alapúba való átváltást a számjegyek csoportosításával (jobbról balra m tagú csoportokba) és a csoportok átváltásával, a b^m alapú számrendszerről b alapú számrendszerre való átváltást az egyes számjegyek átváltásával el lehet végezni, ugyanis egy a b-es számrendszerben n-jegyű c számra és $k = \lceil n/m \rceil$-re
$c = a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \ldots + a_1 b + a_0 = (a_{km-1}b^{m-1} + \ldots + a_{km-m+1}b + a_{k(m-1)})b^{(k-1)m} + \ldots + (a_{2m-1}b^{m-1} + \ldots + a_{m+1}b + a_m)b^m + (a_{m-1}b^{m-1} + \ldots + a_1 b + a_0)$,
ahol $a_i := 0$, ha $i \geq n$, és itt $0 \leq a_{im-1}b^{m-1} + \ldots + a_{im-m+1}b + a_{(i-1)m} < b^m$.
Érdemes a 8-as számrendszerrel kezdeni, és abból átváltani.

1001	8
125	1
15	5
1	7
0	1

$1001 = 1751_8 = 1|111|101|001_2 = 11|1110|1001_2 = 3E9_{16}.$

4. *Határozzuk meg euklideszi algoritmussal* $(288, 204)$*-et, és állítsuk elő a legnagyobb közös osztót* $288x + 204y$ *alakban alkalmas* $x, y \in \mathbb{Z}$*-vel!*

Megoldás:

		288	204
	288	1	0
$-1\cdot$	204	0	1
$-2\cdot$	84	1	-1
$-2\cdot$	36	-2	3
$-3\cdot$	12	5	-7
	0		

Így $(288, 204) = 12 = 288 \cdot 5 + 204 \cdot (-7)$.

5. *Megoldhatók-e az alábbi diofantoszi egyenletek? Ha igen, adjuk meg az összes megoldásukat, illetve az összes nemnegatív megoldásukat!*

a) $288x + 204y = 1$
b) $288x + 204y = 300$
c) $288x + 204y = 3000$

Megoldás: a) Nem oldható meg, mert $(288, 204)$ nem osztója 1-nek (számolás nélkül is látszik, hogy a legnagyobb közös osztó páros).

b) Mivel $(288, 204) = 12 \mid 300$, a diofantoszi egyenlet megoldható, és egyik megoldását megkaphatjuk a 12 előállításának megfelelő többszöröseként: $(x_0, y_0) = (125, -175)$. De akár a 288 és a 12 előállításának az összegeként is kaphatunk egy megoldást: $(6, -7)$. Ebből az összes megoldás felírható: $(6+\frac{204}{12}t,\ -7-\frac{288}{12}t) = (6+17t,\ -7-24t)$, ahol $t \in \mathbb{Z}$ tetszőleges. Nemnegatív megoldása nyilván nincs, mert a nemnegatív kombinációk közül csak 0, 204 és 288 nem nagyobb 300-nál.

c) A b) rész megoldása alapján $(60, -70)$ egy megoldás, és az általános megoldás $(60 + 17t, -70 - 24t)$. Ez nemnegatív, ha $t \geq -\frac{60}{17} = -3\frac{9}{17}$, és $t \leq -\frac{70}{24} = -2\frac{22}{24}$, és ennek csak a $t = -3$ a $\mathbb{Z}$-beli megoldása. Vagyis ennek a diofantoszi egyenletnek a egyetlen nemnegatív megoldása $(9, 2)$.

6. *Bizonyítsuk be, hogy minden* $a > 1$, $m, n \geq 1$ *egész számra* $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

Megoldás: Az állítást $m + n$-re vonatkozó teljes indukcióval látjuk be. $m + n = 2$ esetén $m = n = 1$, és $(a^1 - 1, a^1 - 1) = (a - 1, a - 1) = a - 1 = a^{(1,1)} - 1$. Tegyük fel, hogy valamely $m, n \geq 1$ esetén a kisebb összegű párokra már beláttuk az állítást. Feltehetjük, hogy $m \geq n$. Ekkor $(a^m - 1, a^n - 1) = (a^m - 1 - a^{m-n}(a^n - 1), a^n - 1) = (a^{m-n} - 1, a^n - 1)$, és az utóbbi az indukciós feltevés szerint $= a^{(m-n,n)} - 1 = a^{(m,n)} - 1$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy* n, a, b *pozitív egészekre* $\left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor$.

Megoldás: A bal oldali kifejezés az ab azon pozitív egész többszöröseinek száma, amelyek nem nagyobbak n-nél. Viszont $m \in \mathbb{N}^+$-ra $mab \leq n \Leftrightarrow mb \leq \frac{n}{a} \Leftrightarrow mb \leq \lfloor \frac{n}{a} \rfloor \Leftrightarrow m \leq \frac{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor}{b}$, és az ilyen m-ek száma éppen $\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor$.

8. *a) Mi a 2 kitevője 17! kanonikus alakjában?*
b) Hány nullára végződik a 100! szám?

Megoldás:
a) $\left\lfloor \frac{17}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{17}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{17}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{17}{16} \right\rfloor = 8 + 4 + 2 + 1 = 15.$
b) Egy n szám pontosan k nullára végződik, ha 10^k osztója az adott számnak, de 10^{k+1} nem. Mivel $10^k = 2^k \cdot 5^k$ relatív prím prímhatványok szorzata, ehhez az kell, hogy ($[n]_p$-vel jelölve p kitevőjét n kanonikus alakjában) $[n]_2$ és $[n]_5$ mindegyike legalább k, de az egyik pontosan k. Az $n = 100!$ esetben $[100!]_2 = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2^2} \right\rfloor + \ldots$ nyilván legalább akkora, mint $[100!]_5 = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5^2} \right\rfloor + 0 + 0 + \ldots = 24$, tehát 100! pontosan 24 darab 0-ra végződik.

9. *Határozzuk meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!*
a) $2^{23}3^{10}7^{13}$, $2^{15}7^{10}13^5$
b) $2^{23}3^{10}7^{13}$, $2^{15}7^{10}13^5$, $3^{15}7^{20}11^2$.

Megoldás: a) A lnko $2^{15}7^{10}$, a lkkt $2^{23}3^{10}7^{13}13^5$.
b) A lnko 7^{10}, a lkkt $2^{23}3^{15}7^{20}11^2 13^5$.

10. *Mutassuk meg, hogy bármely pozitív a és b egészhez van olyan m és n egész, hogy $m \mid a$, $n \mid b$, $(m, n) = 1$ és $mn = [a, b]$.*

Megoldás: Legyen $a = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ és $b = p_1^{b_1} \cdots < p_r^{b_r}$, ahol $0 < p_1 < \ldots < p_r$ prímek, és $a_i, b_i \geq 0$. Definiáljuk az m és n számokat is a faktorizációjukkal: a p_i kitevője m-ben, illetve n-ben:

$$m_i = a_i, \text{ ha } a_i \geq b_i, \text{ és } 0 \text{ különben,}$$
$$n_i = b_i, \text{ ha } a_i < b_i, \text{ és } 0 \text{ különben.}$$

Ekkor m-ben p_i kitevője $m_i \leq a_i$ $\forall i$, ezért $m \mid a$, és hasonlóan n-ben p_i kitevője $n_i \leq b_i$ $\forall i$, ezért $n \mid b$.
Továbbá p_i kitevője mn-ben $m_i + n_i = \max\{a_i, b_i\}$, így $mn = [a, b]$, és mivel minden i-re $m_i = 0$ vagy $n_i = 0$, (m, n)-ben minden p_i kitevője $\min\{m_i, n_i\} = 0$, azaz $(m, n) = 1$.