Gyakorló feladatok

1. *Számítsuk ki az $1-2i$ komplex szám négyzetgyökeit (trigonometrikus alak használata nélkül)!*

Megoldás: Keressük meg azt a $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ számot, amelyre $(x+yi)^2 = 1-2i$, azaz $x^2 - y^2 + 2xyi = 1 - 2i$. Az algebrai alak egyértelműsége miatt ez ekvivalens az $x^2 - y^2 = 1,\ \ 2xy = -2$ egyenletrendszerrel. A második egyenletből $y = -\dfrac{1}{x}$, és ezt az elsőbe helyettesítve az

$$x^4 - x^2 - 1 = 0$$

egyenletet kapjuk. Ebből $x^2 = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, de $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$, tehát csak az $x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ megoldás jó, amiből

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ és } y = -\frac{1}{x} \ \Rightarrow\ z = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right).$$

2. *Számítsuk ki $-\sqrt{3}+i$ ötödik gyökeit!*

Megoldás: $z = -\sqrt{3}+i$-re $|z| = 2$, és így $z = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$, vagy radiánban $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.
Így az ötödik gyökök

$$\sqrt[5]{2}\big(\cos(30^\circ + k\cdot 72^\circ) + i\sin(30^\circ + k\cdot 72^\circ)\big) \qquad (k = 0,1,2,3,4), \quad \text{vagy radiánban}$$

$$\sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{5}\right)\right) \qquad (k = 0,1,2,3,4).$$

3. *a) Határozzuk meg az $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots$ összeg értékét az $(1+i)^n$ algebrai és trigonometrikus alakjának az összehasonlításával!*
b) Számítsuk ki a $(\cos x + i\sin x)^3$ kifejezést kétféle módon! Ennek segítségével fejezzük ki $\cos(3x)$-et $\cos x$ függvényében!

Megoldás: a) $(1+i)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k$, másrészt $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$. Az elsőnek a valós része a páros indexű tagokból áll. Ha ezt összevetjük a trigonometrikus alakkal, azt kapjuk, hogy

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots = \sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\binom{n}{2m} = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Esetszétválasztással szebb alakra is hozhatjuk:

$$\begin{cases} 0 & \text{ha } n \equiv \pm 2 \pmod 8 \\ 2^{n/2} & \text{ha } n \equiv 0 \pmod 8 \\ -2^{n/2} & \text{ha } n \equiv 4 \pmod 8 \\ 2^{(n-1)/2} & \text{ha } n \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ -2^{(n-1)/2} & \text{ha } n \equiv \pm 3 \pmod 8 \end{cases}$$

b) A trigonometrikus alakban végzett hatványozással

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos(3x) + i \sin(3x),$$

a binomiális tétel szerint pedig

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + i3 \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x.$$

A két kifejezés valós részét összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x(1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

4. *Ha ε primitív n-edik egységgyök, mi lehet a rendje*
a) $-\varepsilon$-nak;
b) ε^k-nak?

Megoldás: $\varepsilon = \cos \frac{m}{n} 2\pi + i \sin \frac{m}{n} 2\pi$, ahol $(m, n) = 1$.

a) $-\varepsilon = (-1)\varepsilon = (\cos \pi + i \sin \pi) \left(\cos \frac{m}{n} 2\pi + i \sin \frac{m}{n} 2\pi\right) =$
$= \cos\left(\pi + \frac{m}{n} 2\pi\right) + i \sin\left(\pi + \frac{m}{n} 2\pi\right)$, tehát olyan 1 abszolút értékű komplex szám, amelynek szöge $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{m}{n}\right) 2\pi = \dfrac{n + 2m}{2n} 2\pi$. Azt kell csak megállapítani, hogy mi a nevezője az $\dfrac{n + 2m}{2n}$ számnak az egyszerűsített alakjában. Páratlan prímmel nem lehet egyszerűsíteni, mert az a nevező miatt osztója lenne n-nek is, és akkor a számláló miatt $2m$-nek, így m-nek is, tehát n és m nem lennének relatív prímek. 2-vel akkor lehet egyszerűsíteni, ha n páros. Ilyenkor a nevező 4-gyel is osztható, de m páratlan, így $2m \equiv 2 \pmod 4$. Tehát 4-gyel csak akkor lehet egyszerűsíteni, ha $n \equiv 2 \pmod 4$. Viszont ekkor a nevező 8-cal már nem osztható, tehát 8-cal semmiképpen nem tudunk egyszerűsíteni.
összefoglalva:

$$-\varepsilon \text{ rendje } \begin{cases} 2n, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ n, & \text{ha } 4 \mid n, \text{ és} \\ \frac{n}{2}, & \text{ha } n \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

b) $(\varepsilon^k)^t = \varepsilon^{kt} = 1 \Leftrightarrow n \mid kt \Leftrightarrow \frac{n}{(k,n)} \mid \frac{k}{(k,n)} t \Leftrightarrow \frac{n}{(k,n)} \mid t$, mert $\left(\frac{n}{(k,n)}, \frac{k}{(k,n)}\right) = 1$. Tehát ε^k rendje, azaz a legkisebb pozitív t, amelyre $(e^k)^t = 1$, $t = \frac{n}{(k,n)}$.

5. *Adjuk meg a primitív 5-ödik és a primitív 8-adik egységgyökök összegét és szorzatát!*

Megoldás: A primitív ötödik egységgyökök $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$, ahol $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$. Így az összegük $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4) - 1 = -1$, mert tudjuk, hogy minden $n > 1$-re az n-edik egységgyökök összege 0. A szorzatuk $\varepsilon^{1+2+3+4} = \varepsilon^{10} = 1$.
A primitív nyolcadik egységgyökök $\varepsilon, \varepsilon^3, \varepsilon^5, \varepsilon^7$, ahol $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$. Az összegük $\varepsilon(1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6) = 0$, mert $1, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^6$ éppen a 4-edik egységgyökök, a szorzatuk pedig $\varepsilon^{1+3+5+7} = \varepsilon^{16} = 1$.

6. *Adjuk meg annak a négyzetnek a másik két csúcsát, melynek két átellenes csúcsát két adott komplex szám, z_1 és z_2 alkotják!*

Megoldás: A négyzet középpontja $\frac{z_1+z_2}{2}$, a másik két csúcsot pedig megkaphatjuk a z_1-nek a középpont körüli $\pm 90°$ fokos elforgatásával. Mivel az origó körüli 90°-os forgatás az $i = \cos 90° + i \sin 90°$ számmal való szorzás, a két csúcs:

$$\left(z_1 - \frac{z_1+z_2}{2}\right) i + \frac{z_1+z_2}{2} = z_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) + z_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right),$$

$$\left(z_1 - \frac{z_1+z_2}{2}\right)(-i) + \frac{z_1+z_2}{2} = z_1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right) + z_2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right),$$

7. *Adjuk meg a komplex számsíknak az $y = x - 1$ egyenesre való tükrözését komplex műveletekkel!*

Megoldás: Először eltoljuk és az origó körül elforgatjuk a síkot úgy, hogy az egyenes az x tengelyre essen, aztán konjugáljuk az eltranszformált z-t, és utána visszaforgatjuk és visszatoljuk az eredményt:

$$z \mapsto \overline{(z+i)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}-\tfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)-i = (\bar{z}-i)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 - i = (\bar{z}-i)i - i = \bar{z}i + 1 - i$$

8. *Osszuk el maradékosan az $x^4 - 2x + 5$ polinomot*

a) $x^2 - x + 2$-vel,
b) $x + 1$-gyel,
c) $(x+1)^2$-nel!
d) $(x^2 - 1)$-gyel!

Megoldás: a)

$$\begin{array}{l}
(x^4 \qquad\qquad -2x+5) : (x^2 - x + 2) \;= x^2 + x - 1 \\
-(x^4 \;-x^3 \;+2x^2) \\
\hline
\qquad x^3 \;-2x^2 - 2x \;+5 \\
\quad -(x^3 \;\;-x^2 + 2x) \\
\hline
\qquad\quad -x^2 - 4x \;+5 \\
\qquad -(-x^2 \;+x \;-2) \\
\hline
\qquad\qquad -5x \;+7
\end{array}$$

Tehát $x^4 - 2x + 5 = (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 1) + (-5x + 7)$.

b) Horner-módszerrel:

	1	0	0	−2	5
−1	1	−1	1	−3	8

Tehát $x^4 - 2x + 5 = (x+1)(x^3 - x^2 + x - 3) + 8$.

c) A b) részben kiszámolt hányadost még egyszer eloszthatjuk $(x+1)$-gyel a Horner-módszer segítségével: $x^3 - x^2 + x - 3 = (x+1)(x^2 - 2x + 3) - 6$, és ezt behelyettesítve a negyedfokú polinom felírásába:
$x^4 - 2x + 5 = (x+1)((x+1)(x^2 - 2x + 3) - 6) + 8 = (x+1)^2(x^2 - 2x + 3) - (x+1)6 + 8 = (x+1)^2(x^2 - 2x + 3) + (-6x + 2)$.

d) Mivel $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, itt is alkalmazhatjuk a Horner-módszert úgy, hogy a b) részben kapott hányadost $(x-1)$-gyel osztjuk maradékosan: $x^3 - x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2+1) - 2 \Rightarrow x^4 - 2x + 5 = (x+1)((x-1)(x^2+1) - 2) + 8 = (x^2-1)(x^2+1) + (x+1)(-2) + 8 = (x^2-1)(x^2+1) + (-2x+6)$

9. *Horner-módszer alkalmazásával írjuk fel az* x^3+2x^2+1 *polinomot* $(x-3)$ *hatványai szerint rendezve!*

Megoldás: Addig osztjuk maradékosan $(x-3)$-mal az előző osztás maradékát, amíg a hányados konstans nem lesz. Ekkor ez a konstans hányados és a maradékok fordított sorrendben éppen az $(x-3)$ hatványainak az együtthatóit adják.

	1	2	0	1
3	1	5	15	**46**
3	1	8	**39**	
3	**1**	**11**		

Tehát $x^3+2x^2+1=(x-3)^3+11(x-3)^2+39(x-3)+46$.