Gyakorló feladatok

1. *Határozzuk meg $x^3 - 2x^2 + x - 1$ és $x^2 + 2$ legnagyobb közös osztóját, és állítsuk elő a legnagyobb közös osztót ezen polinomok polinomegyütthatós lineáris kombinációjaként a kibővített euklideszi algoritmus segítségével!*

Megoldás: Az $x^3-2x^2+x-1 = (x^2+2)(x-2)+(-x+3)$ és $x^2+2 = (-x+3)(-x-3)+11$ maradékos osztásokat követve:

	$x^3 - 2x^2 + x - 1$	$x^2 + 2$
$x^3 - 2x^2 + x - 1$	1	0
$x^2 + 2$	0	1
$-x + 3$	1	$-x + 2$
11	$x + 3$	$-x^2 - x + 7$

Tehát $11 = (x^3 - 2x^2 + x - 1)(x + 3) + (x^2 + 2)(-x^2 - x + 7)$, vagy
$1 = (x^3 - 2x^2 + x - 1)\frac{1}{11}(x + 3) + (x^2 + 2)\frac{1}{11}(-x^2 - x + 7)$.

2. *Határozzuk meg az alábbi polinomok gyökeit, és bontsuk fel a polinomokat irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_5[x]$-ben!*

a) $2x^3 - 7x^2 + 2$
b) $x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$
c) $x^5 + 1$

Megoldás: a) A racionális gyökteszt szerint az $f(x) = 2x^3-7x^2+2$ polinomnak racionális gyöke csak ± 1, ± 2 vagy $\pm\frac{1}{2}$ lehet. Behelyettesítéssel könnyen látjuk, hogy ezek közül csak az utolsó, $-\frac{1}{2}$ lesz valóban gyök. Horner-módszerrel leosztva azt kapjuk, hogy $f(x) = (x + \frac{1}{2})(2x^2 - 8x + 4) = (2x + 1)(x^2 - 4x + 2)$. A másodfokú tényező gyökei $2 \pm \sqrt{2}$, tehát $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{C}[x]$-ben is az irreducibilisekre való felbontása $f(x) = (2x+1)(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$. A $(2x+1)(x^2-4x+2)$ felbontás $\mathbb{Z}_5$ fölött is valódi felbontást ad, és a másodfokú tényezőnek itt nincs gyöke $(0, 1, 2, 3, 4$ közül egyiknek a behelyettesítése sem ad 0-t modulo 5, vagy teljes négyzetté való kiegészítéssel is láthatjuk, hogy $x^2-4x+2 = (x-2)^2-2$-nek nem lehet gyöke, mert 2 nem négyzetszám modulo 5). Tehát x^2-4x+2 irreducibilis $\mathbb{Z}_5[x]$-ben, és így ott a $(2x+1)(x^2-4x+2)$ az irreducibilisekre bontás.

b) A racionális gyökteszt szerint az $f(x) = x^6-2x^5-x^4+4x^3-5x^2+6x-3$ polinomnak racionális gyöke csak ± 1 vagy ± 3 lehet. Könnyen látható, hogy 1 valóban gyök. Emeljük ki $(x - 1)$-et Horner-módszerrel! A hányadosnak is gyöke az 1, ezért tovább osztjuk.

	1	-2	-1	4	-5	6	-3
1	1	-1	-2	2	-3	3	0
1	1	0	-2	0	-3	0	

$f(x) = (x-1)^2(x^4-2x^2-3) = (x-1)^2(x^2-3)(x^2+1) = (x-1)^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)$ az $\mathbb{R}$ fölötti felbontás, mert $x^2 + 1$ irreducibilis (másodfokú, és nincs valós gyöke).
$\mathbb{C}$ fölött tovább bontható: $f(x) = (x - 1)^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - i)(x + i)$.

A $\mathbb{Z}_5$ fölötti felbontást a $\mathbb{Z}$ fölötti felbontás tovább bontásával kaphatjuk meg (x^2-3)-nak nincs gyöke $\mathbb{Z}_5$-ben, $(x^2+1)=(x^2-4)$-nek van:
$f(x)=(x-1)^2(x^2-3)(x-2)(x+2)$.

c) $x^5=-1=\cos\pi+i\sin\pi \Leftrightarrow x=\cos\left(\frac{\pi}{5}+k\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}+k\frac{2\pi}{5}\right)$ $(k=0,1,2,3,4)$.
A komplex gyöktényezős felbontásból megkapjuk a valósat a konjugált tényezők párosításával:
$x^5+1=(x-(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}))(x-(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}))(x-(\cos\pi+i\sin\pi))\cdot$
$\cdot(x-(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}))(x-(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}))=$
$(x+1)\left(x^2-2\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)x+1\right)\left(x^2-2\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)x+1\right)$.
Látható, hogy $\mathbb{Z}_5$ fölött gyöke a polinomnak a -1, és ismételt Horner-módszerrel az $(x+1)$-et még négyszer ki tudjuk emelni: $x^5+1=(x+1)^5$ $\mathbb{Z}_5[x]$-ben.

3. *Adjuk meg $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött az irreducibilis másodfokú polinomokat!*

Megoldás: $\mathbb{Z}_2$ fölött összesen négy másodfokú polinom van. Ha irreducibilis, akkor a konstans tag nem lehet 0, hogy a 0 ne legyen gyök, és az együtthatók összege sem 0, hogy az 1 ne legyen gyök. Az egyetlen lehetőség az x^2+x+1, és ez valóban irreducibilis, mert másodfokú, és nincs gyöke.
$\mathbb{Z}_3$ fölött elég az 1 főegyütthatós irreducibiliseket megkeresni, a többi irreducibilis ezeknek a -1-szerese. A konstans tag itt sem lehet 0, tehát hatféle lehetőségünk van az együtthatók megválasztására. Ha a konstans tag 1, akkor a középső sem 1, sem -1 nem lehet, mert akkor 1, illetve -1 gyöke lenne a polinomnak. Az x^2+1 polinom viszont valóban irreducibilis. Ha a konstans tag -1, akkor a középső nem lehet 0, de x^2+x-1 és x^2-x-1 mindegyike irreducibilis. Így az 1 főegyütthatós másodfokú irreducibilis polinomok $\mathbb{Z}_3[x]$-ben x^2+1, x^2+x-1 és x^2-x-1.

4. *Adjuk meg azt a legalacsonyabb fokú 1 főegyütthatós*
a) komplex együtthatós
b) valós együtthatós
polinomot, amelynek i kétszeres, 1 háromszoros gyöke!

Megoldás: a) $(x-i)^2(x-1)^3$
b) Ha i kétszeres gyöke egy valós polinomnak, akkor $-i$ is az, tehát a polinom legalább hetedfokú, és az $(x-i)^2(x+i)^2(x-1)^3=(x^2+1)^2(x-1)^3$ valóban ilyen polinom.

5. *Határozzuk meg az $(x-2)^2(x+i)^5(x-3)(x-4)^2$ és az $(x-2)(x+i)^2(x-3)^3$ polinomok legnagyobb közös osztóját!*

Megoldás: $(x-2)(x+i)^2(x-3)$.

6. *Mutassuk meg, hogy páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke!*

Megoldás: Mivel egy páratlan fokú, pozitív főegyütthatós polinom mint valós függvény $-\infty$-ben $-\infty$-hez tart, $+\infty$-ben pedig $+\infty$-hez, a függvény negatív és pozitív értéket is felvesz, és így a Bolzano-tétel miatt a 0-t is felveszi.
Az algebra alaptételéből is következik az állítás, mert a nem valós gyökök és a konjugáltjuk ugyanolyan multiplicitású gyökei a polinomnak, és multiplicitással együtt páratlan sok gyöke van, tehát kell lennie valós gyöknek is.

7. *Határozzuk meg az a együtthatót úgy, hogy -1 legalább kétszeres gyöke legyen az*

$$x^5 - ax^2 - ax + 1$$

polinomnak!

Megoldás: $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$-nek gyöke a -1: $f(-1) = -1 - a + a + 1 = 0$. Emeljük ki $(x+1)$-et!

	1	0	0	$-a$	$-a$	1
-1	1	-1	1	$-1-a$	1	0

$f(x) = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - (1+a)x + 1)$. Akkor lesz hányadosnak is gyöke a -1, ha $1+1+1+1+a+1 = 0$, azaz $a = -5$.
Vagy a kiemelés helyett használhatjuk azt a tételt, hogy c pontosan akkor többszörös gyöke f-nek, ha $f(c) = f'(c) = 0$. Mivel $f(-1) = 0$ teljesül, csak azt kell biztosítani, hogy $f'(-1) = 0$ legyen: $f'(x) = 5x^4 - 2ax - a$, tehát $f'(-1) = 5 + 2a - a = 5 + a$ pontosan akkor 0, ha $a = -5$.

8. *Adjuk meg az alábbi polinomok komplex gyöktényezős alakját!*
a) $x^3 - 1$
b) $x^n + 1$
c) $x^4 + x^2 + 1$

Megoldás: a) $x^3 - 1 = (x-1)\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$.

b) $x^n + 1 = \dfrac{x^{2n} - 1}{x^n - 1}$, tehát $x^n + 1$ gyökei azok a $2n$-edik egységgyökök, amelyek nem n-edik egységgyökök. Ha ε primitív $2n$-edik egységgyök, akkor ε páros hatványai n-edik egységgyökök is, és ez már n gyöktényezőt kivesz $x^{2n} - 1$-ből, tehát a maradék n-edfokú polinom csak az ε páratlanadik hatványaihoz tartozó gyöktényezők szorzata lehet: $x^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(x - \varepsilon^{2k+1})$.

c) $x^4 + x^2 + 1 = \dfrac{x^6 - 1}{x^2 - 1} = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^4)(x-\varepsilon^5)$, ahol $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ primitív 6-odik egységgyök.

9. *Mutassuk meg, hogy egy racionális együtthatós, $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis polinomnak nem lehet $\mathbb{C}$-ben többszörös gyöke!*

Megoldás: Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, ahol $\deg f \geq 1$. Ha f-nek van többszörös gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $d(x) = (f(x), f'(x)) \in \mathbb{Q}[x]$ nem konstans (az euklideszi algoritmus miatt (f, f') ugyanaz $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{Q}[x]$-ben, és $\mathbb{C}[x]$-ben a legnagyobb közös osztónak van gyöke). De akkor $d(x) \mid f(x)$, tehát $f(x)$ felbonthatatlansága miatt $d(x) = cf(x)$ valamely $0 \neq c \in \mathbb{Q}$ konstansra. Viszont $\deg d(x) \leq \deg f'(x) = \deg f(x) - 1$, ami ellentmondás.