Gyakorló feladatok

1. *Legkevesebb hány tagja van az $f(x,y,z) = xy^3z - 2x^2y^3 + \dots$ szimmetrikus polinomnak? Írjuk fel ezt a minimális tagszámú polinomot úgy, hogy a tagjai lexikografikusan legyenek rendezve! Állítsuk elő elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként is!*

Megoldás: Az xy^3z tagból összesen háromfélét lehet kapni a változók permutációival (háromféleképpen választhatjuk ki, hogy melyik legyen harmadik hatványon, és a másik kettő elsőn lesz), a másikból viszont hatot (háromféle lehet a köbös változó, és emellé kétféle lehet a négyzetes). Tehát minimum kilenc tagja van.

$$f(x,y,z) = (x^3yz + y^3xz + z^3xy) - 2(x^3y^2 + x^3z^2 + y^3x^2 + y^3z^2 + z^3x^2 + z^3y^2)$$

Lexikografikusan rendezve:

$$f(x,y,z) = -2x^3y^2 + x^3yz - 2x^3z^2 - 2x^2y^3 - 2x^2z^3 + xy^3z + xyz^3 - 2y^3z^2 - 2y^2z^3$$

Az átalakításhoz érdemes a homogén részeket különválasztani, és azt kezdeni előbb átalakítani, amelyiknek lexikografikusan nagyobb a főtagja, mert abban az átalakítás során megjelenhet a kisebb főtagú, ha ugyanolyan a foka.
$x^3y^2 + x^3z^2 + y^3x^2 + y^3z^2 + z^3x^2 + z^3y^2 =$
$(xy+xz+yz)(xy+xz+yz)(x+y+z) - 2(x^3yz+y^3xz+z^3xy) - 5(x^2y^2z+x^2z^2y+y^2z^2x)$
Tehát
$f(x,y,z) = -2e_2^2e_1 + 5(x^3yz + y^3xz + z^3xy) + 10(x^2y^2z + x^2z^2y + y^2z^2x) =$
$-2e_2^2e_1 + 5(xyz(x+y+z)^2 - 2(x^2y^2z + x^2z^2y + y^2z^2x)) + 10(x^2y^2z + x^2z^2y + y^2z^2x) =$
$-2e_2^2e_1 + 5e_3e_1^2$.

2. *Az alábbi mátrixok közül melyek vannak lépcsős, illetve redukált lépcsős alakban? A redukált lépcsőseknél írjuk fel a mátrixhoz tartozó lineáris egyenletrendszer megoldását vektoros alakban!*

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ *b)* $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ *c)* $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ *e)* $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Megoldás: a) Lépcsős, de nem redukált lépcsős, mert az első sor vezéreleme nem 1.

b) Redukált lépcsős alak. A megoldása

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad \text{vagy vektorosan} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

c) Nem lépcsős: a harmadik sor vezéreleme nincs jobbra a másodikénál.

d) Redukált lépcsős alak. Kötött változói x_1, x_3, szabad változói x_2, x_4. A szabad változóknak tetszőleges értékeket adhatunk: $x_2 = s$, $x_4 = t$ $(s,t \in \mathbb{R})$, és ebből a megoldás: $x_1 = 1-2t$, $x_2 = s$, $x_3 = 2-3t$, $x_4 = t$, vagy vektorosan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ s \\ 2-3t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s,t \in \mathbb{R}).$$

e) Lépcsős alak, de nem redukált, mert a második sor vezéregyese fölött van nem nulla elem.

3. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:*

a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ -x + y - z &= 2 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ 4x + 4y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 7x + 14y - 21z &= 7 \\ x + 2y - 3z &= 1 \\ 5x + 10y + 15z &= 5 \\ 3x + 6y - 9z &= 3 \end{aligned}$$

Ki tudunk-e választani az eredeti egyenletek közül kevesebbet, melyek ugyanezt a megoldást adják? Melyeket?

Megoldás: a)
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right].$$

Bár ez még nem lépcsős alak, ebből is látszik, hogy a negyedik sor ellentmondásos, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása.

b)
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 7 & 14 & -21 & 7 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 10 & 15 & 5 \\ 3 & 6 & -9 & 3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Itt y szabad változó, és a megoldás:
$$\begin{aligned} x &= 1 - 2t \\ y &= t \\ z &= 0 \end{aligned}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Az első egyenletrendszernél már az első és a negyedik sor is ellentmond egymásnak, a másodikban a második és a harmadik egyenletből is ugyanezt a megoldást kapjuk (az első és a negyedik egyenlet a másodiknak 7-, illetve 3-szorosa).

4. *Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek:*

a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és egyértelmű a megoldása;
b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és nincs megoldása;
d) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van és pontosan 5 megoldása van (van-e ilyen valós, illetve véges test fölötti egyenletrendszer)?

Megoldás: a) Nincs, ha van megoldás, akkor van szabad változó is, ugyanis az öt sorban legfeljebb öt vezérelem lehet, nem jut minden oszlopba.

b) Igen, pl. lehet $x_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, és $x_1 + x_2 = 0$.

c) Igen, akár az egyik egyenlet önmagában is lehet ellentmondásos (csupa nulla együttható, és nem nulla konstans).

d) Valós egyenletrendszer nem lehet ilyen, mert ha egynél több megoldása van, akkor van szabad változója, és az végtelen sok értéket vehet föl. Viszont $\mathbb{Z}_5$ fölött lehet ilyen egyenletrendszer, például $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $x_4 - x_5 = 0$ megoldásai $(0, 0, 0, t, t)$, ahol $t \in \mathbb{Z}_5$ tetszőleges.

5. *Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő mátrixhoz tartozó valós egyenletrendszernek? Oldjuk meg a feladatot $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött is!*

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -a & b \\ 1 & 3 & a & 0 \end{array}\right]$$

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 2 & -a & | & b \\ 1 & 3 & a & | & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -a & | & b-1 \\ 0 & 2 & a & | & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -a & | & b-1 \\ 0 & 0 & 3a & | & 1-2b \end{bmatrix}$$

Ez lépcsős alak, és ha $a \neq 0$, akkor nincs ellentmondásos sor, és minden oszlopban van vezérelem, tehát 1 megoldás van;
ha $a = 0$ és $1 - 2b = 0$, azaz ha $a = 0$ és $b = \frac{1}{2}$, akkor nincs ellentmondásos sor, de van szabad változó, ezért végtelen sok megoldás van,
végül ha $a = 0$ és $b \neq \frac{1}{2}$, akkor nincs megoldás.
A sorredukció ugyanez $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött is, mert nem osztottunk sem 2-vel, sem 3-mal.
$\mathbb{Z}_2$ fölött a lépcsős alak harmadik konstansa nem nulla, így 1 megoldás van akkor, ha $a \neq 0$, és nincs megoldás, ha $a = 0$.
$\mathbb{Z}_3$ fölött $3a = 0$, tehát ha $2b \neq 1$, azaz ha $b \neq -1$, akkor nincs megoldás, ha viszont $b = -1$, akkor van megoldás és egy szabad változó van, ami $\mathbb{Z}_3$ tetszőleges elemét veheti föl értékként $(0, 1, 2\text{-t})$, így ekkor három megoldás van.

6. *Határozzuk meg az $x + 3y + z = 2$ és $x + 2y + 2z = 5$ egyenletű síkok metszetét! Ha a metszet egyenes, adjuk meg az egyenes explicit (paraméteres) egyenletét vektorosan és koordinátánként is!*

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 2 \\ 1 & 2 & 2 & | & 5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 11 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 \end{bmatrix}$$

A megoldás az $x = 11 - 4t,\ \ y = -3 + t,\ \ z = t\ \ (t \in \mathbb{R})$ egyenes, vagy vektorosan

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Az utóbbiból leolvasható, hogy az egyenes átmegy a $(11, -3, 0)$ ponton, és párhuzamos a $(-4, 1, 1)$ vektorral.)

7. *Adjuk meg a $2x - y + z = 1$ sík explicit egyenletét, illetve egyenletrendszerét: oldjuk meg az egyenletet, mint egy egy egyenletből álló egyenletrendszert, és írjuk fel a megoldást vektorosan és koordinátánként is!*

Megoldás:

$$[\,2 \quad -1 \quad 1 \quad | \quad 1\,] \mapsto [\,1 \quad -\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2} \quad | \quad \tfrac{1}{2}\,],$$

redukált lépcsős alak. Két szabad változó van, legyen $y = s$ és $z = t$ tetszőleges, ekkor $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t$. Tehát a sík explicit egyenletrendszere, illetve explicit vektoros egyenlete:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}t \\ y &= s \\ z &= t \end{aligned}, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Természetesen ez csak egy a sík lehetséges explicit egyenletei közül, a sík bármely pontját és bármely két a síkkal párhuzamos egymástól független vektort választhatnánk a vektoros egyenletben szereplő három vektornak, és így az egyenletrendszer is más lenne.)