Gyakorló feladatok

1. *Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét, ha van!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$[A\,|\,I\,] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] = [I\,|\,A^{-1}],$$

tehát $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

B nem invertálható, mert nem teljes rangú (az első és a második sor összefügg).

$$[C\,|\,0\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = [I\,|\,C^{-1}] \quad \Rightarrow$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D\,|\,I\,] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right] = [I\,|\,D^{-1}] \Rightarrow$$

$$D^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. *Oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket, ha lehet! A, B, C, D az előző feladatban szereplő mátrixok.*

a) $CX = D$ *b)* $BX = C$ *c)* $XB = M$, *ahol* $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *d)* $XB = AM$

Megoldás: a) Kihasználhatjuk, hogy az előző feladatban kiszámoltuk C inverzét, és abból

$$X = C^{-1}D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

De anélkül is megoldhatjuk szimultán egyenletrendszerként:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right],$$

tehát $X = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

b) Mivel B nem invertálható, itt a szimultán egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right]$$

és már itt a második sorból látszik, hogy nincs megoldás. (Mellesleg, ezt abból is tudhatjuk, hogy $r(B) = 2$, így $r(BX) \leq 2$, míg $r(C) = 3$, ugyanis C invertálható.)

c) Az eredeti helyett a transzponáltját tudjuk szimultán egyenletrendszerként megoldani: $B^T X^T = M^T$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Így X^T első oszlopa $\begin{bmatrix} 4-2t \\ t \\ -1 \end{bmatrix}$, a második $\begin{bmatrix} -1-2s \\ s \\ 2 \end{bmatrix}$, ahol t, s tetszőlegesek. Tehát

$$X = \begin{bmatrix} 4-2t & t & -1 \\ -1-2s & s & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Mivel A invertálható, $XB = AM$ akkor és csak akkor, ha $A^{-1}XB = M$, tehát a c)-beli mátrixegyenlet megoldásait A-val balról megszorozva megkapjuk ennek az egyenletnek a megoldásait:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. *Lineárisak-e a következő leképezések? Ha igen, mi a standard mátrixuk?*

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + 1,\ 2,\ 3)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + y,\ -y,\ 2x)$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|$

d) az $\mathbb{R}^3$ $90°$*-os forgatása a* z *tengely körül*

e) az $x + y - 2z = 0$ *síkra való tükrözés*

f) $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *ahol* f *az* $y = x$ *egyenesre,* g *pedig az* x *tengelyre való tükrözés*

Megoldás: a) Nem lineáris, például mert $f(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$

b) Lineáris:

$$\begin{aligned} f((x,y)+(x',y')) =& f(x+x',\ y+y') = \\ =& (x+x'+y+y',\ -y-y',\ 2x+2x') = \\ =& (x+y,\ -y,\ 2x)+(x'+y',\ -y',\ 2x') = \\ =& f(x,y)+f(x',y'),\ \text{és} \\ f(\lambda(x,y)) =& f(\lambda x,\lambda y) = (\lambda x+\lambda y,\ -\lambda y,\ 2\lambda x) = \\ =& \lambda((x+y,\ -y,\ 2x) = \lambda f(x,y). \end{aligned}$$

Az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ báziselemek képei lesznek a standard mátrix oszlopai: $f(1,0)=(1,0,2)$ és $f(0,1)=(1,-1,0) \Rightarrow$

$$\text{Az } f \text{ standard mátrixa} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vagy közvetlenül a függvény megadásából is leolvashatjuk a standard mátrixot:

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ -y \\ 2x \end{bmatrix} \quad \text{teljesül az} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mátrixra.}$$

És ez egyúttal a linearitást is bizonyítja (a korábbi számolás helyett), mivel egy $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mátrixleképezés szükségképpen lineáris.

c) Nem lineáris, mert például $f(\mathbf{e}_1)=1$, de $f(-\mathbf{e}_1)=1 \neq -f(\mathbf{e}_1)$.

d) Lineáris e)-vel és f)-fel együtt, mert mindegyik az origót helyben hagyó egybevágóság. Az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisvektorok képe rendre $\mathbf{e}_2$, $-\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_3$, ezért a standard mátrix

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Itt a standard bázisvektorok képének kiszámolása helyett, vagy egy általános (x,y,z) pont képének meghatározása helyett, egyszerűbb egy olyan bázis elemeinek a képét megadni, amelyre a báziselemek vagy a síkból valók (mert azok önmagukba mennek), vagy merőlegesek rá. Legyen $\mathbf{b}_1=(1,1,1)$, $\mathbf{b}_2=(2,0,1)$, $\mathbf{b}_3=(1,1,2)$. Ekkor az A standard mátrixra

$$A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

f) Könnyen látható, hogy $\mathbf{e}_1 \overset{f}{\mapsto} \mathbf{e}_2 \overset{g}{\mapsto} -\mathbf{e}_2$, és $\mathbf{e}_2 \overset{f}{\mapsto} \mathbf{e}_1 \overset{g}{\mapsto} \mathbf{e}_1$, így a transzformáció standard mátrixa $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

De megkaphatjuk ezt a két transzformáció standard mátrixának kompozíciójaként is: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Vagy felhasználhatjuk azt a geometriai tényt, hogy a sík két egymást metsző tengelyű tükrözésének kompozíciója a metszéspontjuk körüli kétszeres szögű forgatás, és felírhatjuk a $g \circ f$ mátrixát a $-90°$ szögű forgatás mátrixaként is.

4. *Tekintsük a* $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(2,1,3),(1,2,4)\}$ *bázist* $\mathbb{R}^3$*-ben. Mi a* $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ *és a* $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ *áttérési mátrix? Adjuk meg a* $\mathbf{v} = (1,1,2)$ *vektor koordinátavektorát a* $\mathcal{B}$ *bázisra nézve!*

Megoldás:

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

és $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. *Ha az* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *lineáris transzformáció mátrixa a* $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ *bázisban*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

akkor mi a mátrixa a $\mathcal{C} = \{\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\}$*, illetve a* $\mathcal{D} = \{\mathbf{b}_1, 2\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ *bázisban?*

Megoldás:

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_3 \mapsto 3\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 + 9\mathbf{b}_3 = 3\mathbf{c}_3 + 6\mathbf{c}_2 + 9\mathbf{c}_1 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{c}_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2 \mapsto 2\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_2 + 8\mathbf{b}_3 = 2\mathbf{c}_3 + 5\mathbf{c}_2 + 8\mathbf{c}_1 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{c}_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_1 \mapsto 1\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 + 7\mathbf{b}_3 = 1\mathbf{c}_3 + 4\mathbf{c}_2 + 7\mathbf{c}_1 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{c}_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{b}_1 \mapsto 1\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 + 7\mathbf{b}_3 = 1\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2 + 7\mathbf{d}_3 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{d}_1)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_2 = 2\mathbf{b}_1 \mapsto 4\mathbf{b}_1 + 10\mathbf{b}_2 + 16\mathbf{b}_3 = 4\mathbf{d}_1 + 5\mathbf{d}_2 + 16\mathbf{d}_3 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{d}_2)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_3 = \mathbf{b}_3 \mapsto 3\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 + 9\mathbf{b}_3 = 3\mathbf{d}_1 + 3\mathbf{d}_2 + 9\mathbf{d}_3 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{d}_3)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [f]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 7 & 16 & 9 \end{bmatrix}$$

6. *Írjuk fel az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban!*

a) Az $y = x$ egyenesre való tükrözés az $\mathbb{R}^2$ standard $\mathcal{E}$, továbbá a $\mathcal{B} = \{(1,1),(-1,1)\}$, illetve $\mathcal{C} = \{(1,1),(-2,0)\}$ bázisában;

b) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, a $\mathcal{B} = \{(1,2),(1,1)\}$ bázisban;

c) az $S:\ x-2y+z=0$ síkra való merőleges vetítés egy tetszőleges olyan bázisban, amelynek elemei mind párhuzamosak az S síkkal vagy merőlegesek rá, illetve a standard bázisban.

Megoldás: a) Mivel $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1$, a standard mátrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$P = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}} = Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[f]_{\mathcal{C}} = Q^{-1}AQ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$P = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[f_A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

c) Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, ahol $\mathbf{b}_1 = (1,1,1)$ és $\mathbf{b}_2 = (1,0,-1)$ az S két vektora és $\mathbf{b}_3 = (1,-2,1)$ a sík normálvektora. Ekkor $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ önmagába, $\mathbf{b}_3$ $\mathbf{0}$-ba képződik, így

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki az áttérés mátrixát!

$$P = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[f]_{\mathcal{E}} = P[f]_{\mathcal{B}}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

7. *Írjuk fel alkalmas bázisban, majd a standard bázisban is a $\mathbf{v} = (1,1,1)$ irányvektorú, origón átmenő egyenes körüli $90°$-os forgatás mátrixát!*

Megoldás: Érdemes az egyenessel párhuzamos, és az egyenesre és egymásra merőleges vektorokat választani. Legyen $\mathbf{b}_1 = (1,1,1)$, erre merőleges $\mathbf{b}_2 = (1,-1,0)$, és mindkettőre merőleges ezek vektoriális szorzata, $\mathbf{b}_3 = (1,1,-2)$. A forgatás $\mathbf{b}_1$-et önmagába, $\mathbf{b}_2$-t a $\mathbf{b}_3$ irányú $\sqrt{2}$ hosszú $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{b}_3$ vektorba, $\mathbf{b}_3$-at a $-\mathbf{b}_2$ irányú, $\sqrt{6}$ hosszú $-\sqrt{3}\mathbf{b}_2$ vektorba viszi. Így a forgatás $\mathcal{B}$ bázisban felírt mátrixa

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A standard mátrixot megkapjuk $P[f]_{\mathcal{B}}P^{-1}$ alakban, ahol $P = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ az áttérés mátrixa.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[f]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3}-6 & 2\sqrt{3}+6 \\ 2\sqrt{3}+6 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3}-6 \\ 2\sqrt{3}-6 & 2\sqrt{3}+6 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$