Gyakorló feladatok

1. *Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát elemi sorműveletek segítségével!*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 13 \end{vmatrix} = -1 \cdot 13 = -13$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 8 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 8 & -24 \\ 0 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 8\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

A negyedik mátrixnál $[n/2]$ sorcserét kell végezni (az első sort az utolsóval, a másodikat az utolsó előttivel, és így tovább), hogy az identitás mátrixot kapjuk, így a determinánsa $(-1)^{[n/2]}$.

2. *Sorműveletek nélkül, csak inverziószámolással határozzuk meg az alábbi kígyók determinánsát!*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az A mátrixhoz a $4, 3, 2, 1$ permutáció tarozik, amelynek az inverziószáma $\binom{4}{2} = 6$, így $|A| = (-1)^6 \cdot 1^4 = 1$.
A B-hez az $1, 3, 4, 2$ permutáció tartozik, inverziószáma 2, így $|B| = (-1)^2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 4 = -24$.
A C-hez tartozó permutáció $2, 1, 3$, inverziószáma 1, és $|C| = (-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = -30$.

3. *Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?*

Megoldás: $|2A^{-1}| = 2^5|A^{-1}| = 32 \cdot \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{32}{3}$

$|(2A)^{-1}| = \dfrac{1}{|2A|} = \dfrac{1}{96}$

$|A^2 A^T A^{-1}| = |A|^2|A|\dfrac{1}{|A|} = 9.$

4. *Számítsuk ki a következő $n \times n$-es determináns értékét! (Ötlet: a második sort vonjuk ki az összes többiből.)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (n-2)!$$

5. *Számítsuk ki a*

$$\begin{bmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix}$$

determináns értékét! Hogyan lehet ezt általánosítani $n \times n$-es mátrixra? Mennyi a mátrix rangja az a, b, n értékektől függően?

Megoldás: Tekintsük rögtön az $n \times n$-es mátrixot, amelynek főátlójában végig b, mindenhol máshol a van. A determináns kiszámolásánál adjuk az összes sort az elsőhöz, ebből emeljünk ki $(b + (n-1)a)$-t, majd ennek az a-szorosát vonjuk ki a többi sorból! Így háromszögmátrixot kapunk.

$$\begin{vmatrix} b & a & a & \dots & a \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+(n-1)a & \dots & \dots & \dots & b+(n-1)a \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & b \end{vmatrix} =$$

$$(b+(n-1)a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & b \end{vmatrix} = (b+(n-1)a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & b-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b-a \end{vmatrix} =$$

$$= (b+(n-1)a)(b-a)^{n-1}.$$

Ha $b \neq a$ és $b \neq (n-1)a$, akkor a mátrix determinánsa nem 0, így a rangja n. Ha $b = a$, akkor látható, hogy a mátrix rangja 0 vagy 1 aszerint, hogy a nulla vagy nem nulla. Az $n = 1$ esetben 0 vagy 1 a rang, aszerint, hogy b nulla vagy nem nulla. Marad az az eset, amikor $b = -(n-1)a \neq 0$, és $n \geq 2$. Ekkor a rang kisebb n-nél, viszont a jobb fölső sarokaldeterminánsban először az első (csupa a) sort az összes többiből kivonva, majd a determinánst az utolsó oszlop szerint kifejtve azt kapjuk, hogy ennek az aldeterminánsnak az értéke $(-1)^n a |\mathrm{diag}(b-a, \dots, b-a)| = (-1)^n a (b-a)^{n-2} \neq 0$, tehát az eredeti mátrix rangja $n-1$.

6. *Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát és inverzét aldeterminánsok segítségével:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az utolsó sor szerint kifejtve: $|A| = (-1)\cdot(0\cdot 1 - 2\cdot 3) - 1\cdot(1\cdot 1 - 2\cdot 0) = 6 - 1 = 5$.

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -6 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

7. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat minél egyszerűbben!*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c+d & c^2+d^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

Megoldás: a) Az első sort a másodikból kivonjuk, és a második szerint kifejtjük a determinánst.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

b) A harmadik sort kivonjuk a másodikból, és a második sor szerint, majd a kapott 3×3-as determinánst a harmadik sor szerint kifejtjük.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4\cdot 3 = -12$$

c) A determináns multilinearitását használjuk a harmadik sorra, hogy a feladatot visszavezessük Vandermonde-determinánsok kiértékelésére.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c+d & c^2+d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) + (b-a)(d-a)(d-b) - ab(b-a).$$

d) Nevezzük el az $n\times n$-es mátrixot A_n-nek, a determinánsát d_n-nek. Az első sor szerint kifejtve azt kapjuk, hogy $d_n = |A_n| = 2|A_{n-1}| - 1\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{0} & A_{n-2} \end{bmatrix}$, és a második determinánst az első oszlopa szerint kifejtve ez tovább $2d_{n-1} - |A_{n-2}| = 2d_{n-1} - d_{n-2}$. A $d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2}$ egyenletet átrendezve a $d_n - d_{n-1} = d_{n-1} - d_{n-2}$ összefüggéshez jutunk, így az $s_n := d_n - d_{n-1}$ sorozatra $s_n = s_{n-1} = \ldots = s_2 = d_2 - d_1 = 3 - 2 = 1$, tehát $d_n = 1 + d_{n-1} = 2 + d_{n-2} = \ldots = (n-1) + d_1 = n + 1$.

8. *Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját! Keressünk benne a rangnak megfelelő méretű nemnulla aldeterminánst!*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lépcsős, így a mátrix rangja 3. Az A utolsó három oszlopából alkotott mátrix determinánsa nem nulla: az utolsó oszlop szerint kifejtve, $-1\cdot 5 + 1\cdot 0 = -5$.