Gyakorló feladatok

1. *Cramer szabály alkalmazásával oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ahol*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$x_1 = \frac{|A_{1,\mathbf{b}}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{4}{5}, \qquad x_2 = \frac{|A_{2,\mathbf{b}}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{1}{5},$$

$$x_3 = \frac{|A_{3,\mathbf{b}}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{2}{5}$$

2. *Legyenek $B = \begin{bmatrix} I & A \\ I & 2A \end{bmatrix}$ és $C = \begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix}$ 4×4-es blokkmátrixok, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Számítsuk ki a BC szorzatot és ennek segítségével a B determinánsát!*

Megoldás: $BC = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & A \end{bmatrix}$ blokkháromszög-mátrix, a determinánsa $|BC| = |I| \cdot |A| = -1$, míg a C blokkháromszögmátrix determinánsa $|C| = |I| \cdot |I| = 1$, tehát a determinánsok szorzástétele szerint $-1 = |BC| = |B| \cdot |C| = |B|$.

3. *Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in K^n$ vektorok standard skalárszorzata, $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_j = 0$, ha $i \neq j$, de $\neq 0$, ha $i = j$. Lássuk be, hogy ekkor a vektorok lineárisan függetlenek. Speciálisan, $\mathbb{R}^n$-ben bármely k páronként merőleges, nemnulla vektor lineárisan független.*

Megoldás: Ha $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$, akkor $0 = \mathbf{v}_i \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_j \right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j = \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i$, mert a többi tag 0 a feltételek miatt. Másrészt $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i \neq 0$, ezért $\lambda_i = 0$ minden i-re.

Mivel $\mathbb{R}^n$-ben $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$-ból következik, hogy $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i \neq 0$, ott elég feltenni, hogy $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$ $\forall\, i \neq j$, and $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ $\forall\, i$.

4. *Határozzuk meg az A mátrix LU-felbontását! Számítsuk ki ebből az A determinánsát és az $A\mathbf{x} = [1 \ \ -1 \ \ 0]^T$ egyenletrendszer megoldását!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A felső háromszög alakra hozásnál csak $s_i \mapsto s_i - cs_j$ alakú műveleteket használjunk, ahol $i > j$, és először az első sor többszöröseit vonjuk ki, majd a második sorét, és így tovább. Ha a végrehajtott sorműveletekhez tartozó elemi mátrixok rendre $E_1, \ldots, E_k$, akkor $E_k \cdots E_1 A = U$ felső háromszögmátrix, és ebből $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} U$, ahol $L := E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ alsó háromszögmátrix, csupa 1-gyel a főátlóban. L-et megkaphatjuk úgy, hogy az I egységmátrixra végrehajtjuk az A-n végzett sorműveletek inverzét fordított sorrendben: $L = E_1^{-1}(E_2^{-1} \cdots (E_k^{-1} I) \cdots)$. Így $l_{ij} = c_{ij}$ pontosan akkor, ha szerepelt $s_i \mapsto s_i - c_{ij} s_j$ alakú sorművelet, az átló alatti többi elem és minden átló fölötti 0, az átlóbeliek pedig 1-ek.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = U \quad \text{és} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, azaz $L(U\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásához először az $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, majd az $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert oldjuk meg.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(felülről lefelé behelyettesítésekkel megoldva), és

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

(alulról felfelé behelyettesítésekkel megoldva).

5. *Adjuk meg az*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 6 \end{array}$$

valós egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen megoldását, és ennek felhasználásával írjuk fel az összes megoldást!

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ebből leolvasható a homogén egyenletrendszer megoldása is, azaz az együtthatómátrix nulltere:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcr} x & = & -2t \\ y & = & -t \\ z & = & t \end{array} \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a nulltér bázisa $\{(-2,-1,1)\}$, és a sortér ennek a merőlegese, ezért az eredeti egyenletrendszert (illetve annak a redukáltját) ki kell egészíteni a $(-2,-1,1)(x,y,z)^T = 0$ egyenlettel.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A sortérbe eső megoldás: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, és az összes megoldás: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. *Legyen $W \leq \mathbb{R}^3$ altér, melynek generátorrendszere $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$.*

a) Adjuk meg $W^\perp$ egy bázisát.

b) Határozzuk meg a W altérre való merőleges vetítés mátrixát báziscserével és anélkül, azaz használva az $A(A^TA)^{-1}A^T$ képletet.

c) Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (1,1,1)$ vektort W-beli és $W^\perp$-beli összetevők összegére!

Megoldás: a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \text{ megoldása } \begin{matrix} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{matrix}, \text{ azaz } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát $W^\perp$ bázisa $\{(-1,1,1)\}$.

b) Báziscserével: A $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,1,0),(-1,1,1)\}$ bázisban a vetítés mátrixa a $D = \operatorname{diag}(1,1,0)$ mátrix, mert a bázis első két vektorát (a W-beli vektorokat) önmagukba képezi, így ezek koordinátavektora $(1,0,0)^T$ és $(0,1,0)^T$, az utolsót, amely W-re merőleges, pedig $\mathbf{0}$-ba. Így a vetítés standard mátrixa $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} D T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} D T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vagy pedig a $P_W := A(A^TA)^{-1}A^T$ képlettel, ahol A oszlopai a W báziselemei:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (A^TA)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$P_W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c) $\mathbf{v} = P_W\mathbf{v} + (\mathbf{v} - P_W\mathbf{v}) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

7. *Határozzuk meg az $x - y = 1$, $x - y = 2$ ellentmondásos lineáris egyenletrendszer optimális közelítő megoldásait normálegyenlet segítségével! Határozzuk meg az egyetlen sortérbe eső (minimális abszolútértékű) optimális közelítő megoldást!*

Megoldás: $[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$

$$[A^TA|A^T\mathbf{b}] = A^T[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & | & 3 \\ -2 & 2 & | & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Az utóbbinak a megoldása $\begin{bmatrix} (3/2)+t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. A minimális abszolút értékű közelítő megoldást az $(1,1)$ által generált nulltérre való merőlegesség feltételének hozzáadásával kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3/2 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3/2 \\ 0 & 2 & | & -3/2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3/4 \\ 0 & 1 & | & -3/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}.$$

8. *(Lineáris regresszió) Legyen $y = a + bx$ ismeretlen egyenes. Három mérési eredmény szerint $(1,1),(2,3),(4,6)$ az egyenesen lévő (x_i, y_i) pontok mért koordinátái. Keressük a legjobban közelítő megoldást (a,b)-re normálegyenlet segítségével! (A sorai $(1,x_i)$-k, $\mathbf{b}$ sorai y_i-k)*

Megoldás: Az $a+b=1$, $a+2b=3$, $a+4b=6$ egyenletrendszer legjobban közelítő (a,b) megoldását keressük.

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & | & 3 \\ 1 & 4 & | & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow [A^TA|A^T\mathbf{b}] = A^T[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 3 & 7 & | & 10 \\ 7 & 21 & | & 31 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & | & 10 \\ 1 & 7 & | & 11 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 7 & | & 11 \\ 0 & -14 & | & -23 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1/2 \\ 0 & 1 & | & 23/14 \end{bmatrix}.$$

Tehát a legjobban közelítő egyenes (azaz amelynél az adott x_i értékeknél a hibák négyzetösszege minimális), $y = -\frac{1}{2} + \frac{23}{14}x$.

9. *Határozzuk meg a következő mátrixok pszeudoinverzét!*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Ha egy B mátrix teljes oszloprangú, akkor $B^+ = (B^TB)^{-1}B^T$, ha C teljes sorrangú, akkor $C^+ = C^T(CC^T)^{-1}$. Ha az A mátrixra egyik feltétel sem teljesül, akkor az A bázisfelbontása olyan $A = BC$ szorzatot ad, amelyre B teljes oszloprangú és C teljes sorrangú, és ekkor $A^+ = C^+B^+$.

a) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ teljes sorrangú, így $C^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ teljes oszloprangú, így $C^+ = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$ $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = BC = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$C^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B^+ = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$A^+ = C^+B^+ = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$C^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$B^+ = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^+ = C^+B^+ = \tfrac{1}{18}\begin{bmatrix} 12 & -9 & 3 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. *Mutassuk meg, hogy általában nem igaz, hogy $(AB)^+$ egyenlő lenne B^+A^+-szal. Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixokat!*

Megoldás: Legyen $C = AB$. A három mátrix bázisfelbontása

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[1 \quad 0],\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[0 \quad 1] \text{ és } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[0 \quad 1], \text{ amiből}$$

$$A^+ = [1 \quad 0]^+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}[1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B^+ = [0 \quad 1]^+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\tfrac{1}{2}[1 \quad 1] = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C^+ = [0 \quad 1]^+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ de } B^+A^+ = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. *Oldjuk meg a 7. feladatot az együtthatómátrix pszeudoinverzével való beszorzással is!*

Megoldás: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[1 \quad -1] \Rightarrow$

$$A^+ = [1 \quad -1]^+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^+ = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\tfrac{1}{2}[1 \quad 1] = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

A (minimális abszolút értékű) legjobb közelítő megoldás:

$$A^+\mathbf{b} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}.$$