1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV _____ **NEPTUNKÓD** _____

Bevezetés az algebrába 1 **2. vizsga – elmélet** **2021-01-08**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Minden kétváltozós lineáris diofantoszi egyenletnek végtelen sok megoldása van. H

b) Ha $m, n \in \mathbb{N}^+$ relatív prímek, akkor $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. I

c) Egy $z \neq 0$ komplex szám bármely két n-edik gyökének a hányadosa n-edik egységgyök. I

d) Ha $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan összefüggők, akkor minden $\mathbf{v}_i$ felírható a többi $\mathbf{v}_j$ lineáris kombinációjaként. H

e) Ha $A \in K^{m\times n}$ oszlopai lineárisan függetlenek, akkor $\mathcal{S}(A) = K^n$. I

f) Ha BB^T és B^TB is invertálható, akkor B négyzetes mátrix. I

2. Adjunk meg olyan $c \in \mathbb{N}$ számot, amellyel $\{17, 23, 25, c\}$ redukált maradékrendszer modulo 12. *(2 pont)*

7

3. Hány tagja van annak a 4-változós elemi szimmetrikus polinomnak, amelynek tagja az x_1x_2? *(2 pont)*

6

4. Melyik az a legkisebb $c \in \mathbb{N}^+$ szám, amelyre az $f(x) = 2x^3 + 6x + c$ polinom kielégíti valamilyen prímmel a Schönemann–Eisenstein-kritériumot, de semmilyen prímmel nem elégíti ki a fordítottat? *(2 pont)*

6

5. Melyik az az elemi mátrix, amellyel való balszorzás tetszőleges 3-soros mátrix harmadik sorának kétszeresét kivonja az első sorából? *(2 pont)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Mi a feltétele annak, hogy az $\mathcal{U}, \mathcal{W} \leq K^n$ alterekre $\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ legyen? *(2 pont)*

$\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$

7. Adjuk meg az $1, 2, 3, 4, 5$ elemeknek egy olyan permutációját, amelynek az inverziószáma 3. *(2 pont)*

Pl. $3, 2, 1, 4, 5$

8. Ha egy $A \in \mathbb{R}^{3\times 6}$ mátrix legnagyobb méretű nemnulla aldeterminánsa 2×2-es, akkor mi a dimenziója az $\mathcal{O}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ és $\mathcal{N}(A)$ vektortereknek? *(2 pont)*

2, 2, 4

9. Mondjuk ki (pontos feltételekkel) a polinomok maradékos osztásának tételét! *(3 pont)*

Legyen $f(x), g(x) \in K[x]$, ahol K test, és $g(x) \neq 0$. Ekkor egyértelműen létezik $h(x), r(x) \in K[x]$, hogy $f(x) = g(x)h(x) + r(x)$, és $\deg r(x) < \deg g(x)$.

10. Mit jelent az, hogy egy rendezett halmaz jólrendezett? Adjunk példát egy jólrendezett és egy nem jólrendezett végtelen halmazra $\mathbb{R}$-ben. *(2 pont)*

Egy rendezett halmaz jólrendezett, ha minden nemüres részhalmazának van legkisebb eleme.
Pl. $\mathbb{N}$ jólrendezett, $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ nem jólrendezett.

11. Mit jelent az, hogy $\mathbf{v}'$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor merőleges vetülete a $\mathcal{W} \leq \mathbb{R}^n$ altérre? *(2 pont)*

$\mathbf{v}' \in \mathcal{W}$, és $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \mathcal{W}^\perp$.

12. Mondjunk három ekvivalens feltételt (a definíció is köztük lehet) arra, hogy egy $A \in K^{n\times n}$ mátrix invertálható! *(3 pont)*

Van olyan $B \in K^{n\times n}$, hogy $AB = BA = I$.
$|A| \neq 0$.
A redukált lépcsős alakja I.
A sorai lineárisan függetlenek.
A oszlopai lineárisan függetlenek.
$r(A) = n$. (Ez már hat, és még vannak...)

13. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{N}$-ben minden irreducibilis elem prím. *(4 pont)*

14. A Fischer-egyenlőtlenség állítása és bizonyításának alapötlete a lap alján látható. Tekintsük most az $X = \{1, 2, 3\}$ halmazon az

$$\{\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\}$$

halmazrendszert, amely nyilván nem elégíti ki a Fischer-egyenlőtlenség feltételeit.

a) Írjuk fel erre a tétel bizonyításában szereplő M és $A = MM^T$ mátrixot.

b) Mit mutatnak az A mátrix diagonális elemei a halmazrendszerről?

c) Mi az A mátrix determinánsa? *(6 pont)*

Fisher-egyenlőtlenség: Legyenek $C_1, \ldots, C_k \subseteq \{1, \ldots, n\}$ különbözők, és tegyük fel, hogy valamely $c > 0$-ra $|C_i \cap C_j| = c$ $(\forall i \neq j)$. Ekkor $k \leq n$.

Biz. alapötlete: $\forall i\ |C_i| = c + a_i$.
$X \subseteq \{1, \ldots, n\}$ karakterisztikus vektora n-dimenziós 0-1-vektor, $(x_1, \ldots, x_n)$, ahol $x_i = 1 \iff i \in X$.
Az $M \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix i. sora a C_i halmazhoz tartozó karakterisztikus vektor. Ekkor

$$A = MM^T = \begin{bmatrix} c+a_1 & c & c & \ldots & c \\ c & c+a_2 & c & \ldots & c \\ \vdots & & \ddots & & \\ c & & & & c+a_n \end{bmatrix}_{k\times k}, \text{ ui. } \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = |X \cap Y|$$

Tudjuk: $r(A) \leq r(M) \leq n$.
Belátjuk: $|A| \neq 0$, és ebből következni fog, hogy $r(A) = k$, és így $k \leq n$.

13. megoldása: Tfh. $p \in \mathbb{N}$ irreducibilis. (Ekkor $p \geq 2$.)
Ha $p \mid ab$, akkor tekintsük az (a,p) l.n.k.o.-t. $(a,p) \mid p$, és p irreducibilis, így $(a,p) = p$ vagy $(a,p) = 1$.
Ha $(a,p) = p$, akkor $p = (a,p) \mid a$ miatt kész vagyunk.
Ha $(a,p) = 1$, akkor $p \mid ab$-ből $p \mid b$ következik.
Tehát p prím.

14. megoldása: a)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = MM^T = M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Az átlóban az egyes halmazok elemszáma áll: $2, 2, 2, 3$.
c) $r(A) \leq r(M) \leq 3$, mert M 4×3-as, így A nem teljes rangú 4×4-es mátrix. $\Rightarrow |A| = 0$.