E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV _____ **NEPTUNKÓD** _____

Bevezetés az algebrába 1 **1. vizsga – gyakorlat** **2020-12-22**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Mi a 3-as számrendszerbeli 2020_3 szám 10-es és 16-os számrendszerbeli alakja?

60_{10}, $3C_{16}$

E2. Legyen $z = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$ és $u = \cos 10^\circ + i \sin 10^\circ$. Adjuk meg az $i\dfrac{z}{u^2}$ számot trigonometrikus alakban!

$\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ$

E3. Milyen $c \in \mathbb{Z}$-re van racionális gyöke az $x^4 + cx^3 + 2x + 1$ polinomnak?

-4, 0

E4. Írjuk fel az $f(x, y) = x^3y + xy^3$ polinomot elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként!

$(x + y)^2(xy) - 2(xy)^2$

E5. Adjuk meg az $\mathbf{a} = (1, 0, 1, -1)$ és $\mathbf{b} = (-2, 1, 0, 1)$ $\mathbb{R}^4$-beli vektorok hosszát és szögét!

$|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{6}$, a szögük 135°

E6. Hány megoldása van $\mathbb{Z}_2$-ben, illetve $\mathbb{Z}_3$-ban az alábbi kibővített mátrixszal megadott egyenletrendszernek?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right]$$

$\mathbb{Z}_2$-ben 0, $\mathbb{Z}_3$-ban 9

E7. Ha $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 2), (0, 0, 1)\}$ az $\mathbb{R}^3$ egy bázisa, és a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ vektorra $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, akkor $\mathbf{v} =?$.

$(0, 1, 4)$

E8. Adjuk meg az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix LU-felbontását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

1. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 5 \\ x &\equiv -3 \pmod 9 \\ x &\equiv 3 \pmod 4 \end{aligned}$$

$x \equiv 51 \pmod{180}$

2. Oldjuk meg a komplex számok körében a következő egyenletet!

$$z^3 = \frac{6+2i}{2-i}$$

$\sqrt{2}(\cos(15^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(15^\circ + k \cdot 120^\circ))$
$k = 0, 1, 2$

3. Számítsuk ki az x^4+4 és x^3+x^2-2 polinomok legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmussal!

$x^2 + 2x + 2$

4. Bontsuk fel irreducibilis tényezők szorzatára a $f(x) = 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - x - 1$ polinomot $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{C}[x]$-ben!

$(x+1)(2x-1)(2x^2+2x+1)$
$(x+1)(2x-1)2(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)$

5. Legyen W az $(1,1,0,-1)$, $(0,1,2,1)$ és $(2,1,-2,-3)$ vektorok által kifeszített altér $\mathbb{R}^4$-ben. Adjuk meg W-nek és W merőleges kiegészítőjének egy bázisát!

W-nek: $\{(1,1,0,-1),\ (0,1,2,1)\}$,
$W^\perp$-nek: $\{(2,-2,1,0),\ (2,-1,0,1)\}$.

6. Határozzuk meg az alábbi valós A mátrix determinánsát! A c értékétől függően mi a rangja a mátrixnak?

$$A = \begin{bmatrix} c+1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & c & c \end{bmatrix}$$

$|A| = c^2$.
Ha $c \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$.
Ha $c = 0$, akkor $r(A) = 1$.

7. Írjuk fel az

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto (x+y,\ x-y+z,\ y-3z)$$

lineáris transzformáció mátrixát a standard bázisban, és a $\mathcal{B} = \{(0,-1,2),\ (1,1,-1), (3,1,0)\}$ bázisban!

$$[f]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad [f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Számítsuk ki az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét, és ennek segítségével az $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű megoldását!

A pszeudoinverz

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a megoldás $(-1,1,1)$.