E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV _____ **NEPTUNKÓD** _____

Bevezetés az algebrába 1 **2. vizsga – gyakorlat** **2021-01-08**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Hányadik hatványon van a 2 az 50! kanonikus alakjában?

47

E2. Írjuk fel a $z = \dfrac{(1+i)^2}{1-i}$ komplex számot algebrai alakban!

$-1+i$

E3. Hány irreducibilis tényező szorzatára bomlik $f(x) = 6(x^2-2)$ $\mathbb{Z}[x]$-ben, $\mathbb{Q}[x]$-ben, illetve $\mathbb{R}[x]$-ben?

3, 1, 2

E4. Számítsuk ki a $\Phi_2(x)\Phi_6(x)$ polinomot!

x^3+1

E5. Adjuk meg $(1,-1,0,1)$ merőleges vetületét a $(0,1,1,0)$ vektorra!

$(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$

E6. Adjunk meg egy olyan négy ismeretlenes, két egyenletből álló lineáris egyenletrendszert, amelynek $\mathbb{Z}_2$-ben pontosan 4 megoldása van.

Pl. $x_1 = x_2$ és $x_3 = x_4$

E7. Számítsuk ki az alábbi determinánst!

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

18

E8. Hány 2×2-es aldeterminánst lehet kiválasztani az alábbi mátrixból? Van-e köztük 0 értékű? Ha igen, adjunk is meg ilyet!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

6-ot. Pl. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

1. Oldjuk meg az $5x \equiv 1 \pmod{13}$ és $-2x \equiv 5 \pmod{11}$ kongruenciákat, majd keressük meg a közös megoldásaikat.

$x \equiv -5 \pmod{13}$
$x \equiv 3 \pmod{11}$
$x \equiv 47 \pmod{143}$

2. Oldjuk meg a $\dfrac{z^3+2i}{z^3-2i} = 1+2i$ egyenletet!

$z^3 = 2+2i$, $z = \sqrt{2}(\cos(15^\circ + k\cdot 120^\circ) + i\cos(15^\circ + k\cdot 120^\circ))$, $k = 0,1,2$

3. Keressük meg azt a legföljebb másodfokú polinomot, amely a 0, 1 és -2 helyeken ugyanazt az értéket veszi föl, mint a $g(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 4$ polinom.

$x^2 + 4x - 4$

4. Bontsuk fel a $f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_3[x]$-ben!

$(x-2)(2x+1)(x^2+x+1)$ $\mathbb{Q}[x]$-ben
(x^2+x+1 irred, mert másodfokú, és még valós gyöke sincs).
$2(x+1)(x-1)^3$ $\mathbb{Z}_3[x]$-ben.

5. Keressük is meg az alábbi egyenletrendszer sortérbe eső megoldását!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x} = (5, 1, -2)$

6. Legyen $\mathcal{W} = \operatorname{span}((1,0,1,-1),(0,1,2,1),(1,1,3,0))$ az $\mathbb{R}^4$ egy altere. Adjuk meg $\mathcal{W}$-nek egy $\mathcal{B}$ bázisát, döntsük el, hogy az $\mathbf{u} = (1,-2,-3,-3)$ és $\mathbf{v} = (3,1,0,1)$ vektorok benne vannak-e $\mathcal{W}$-ben, és amelyik igen, annak adjuk meg a $\mathcal{B}$ szerinti koordinátavektorát is.

$A = [\mathbf{w}_1\, \mathbf{w}_2\, \mathbf{w}_3 \,|\, \mathbf{u}\, \mathbf{v}]$ er. red. lépcsős alakja:
$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right].$$
$\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, $\mathbf{v} \notin \mathcal{W}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$, $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

7. Legyen f az a lineáris transzformáció, amely az $\mathbb{R}^3$ teret először az xz síkra tükrözi, majd elforgatja a z tengely körül 90°-kal pozitív irányban. Írjuk fel f mátrixát a standard, majd a $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ bázisban is.

$$[f]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Számítsuk ki az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét!

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$