E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV _____ **NEPTUNKÓD** _____

Bevezetés az algebrába 1 **3. vizsga – gyakorlat** **2021-01-15**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 120 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Írjuk fel a 199-et 8-as és 16-os számrendszerben!

307_8, $C7_{16}$

E2. Milyen értékeket vehet föl $a+2$ és $a-2$ legnagyobb közös osztója, ha $a \in \mathbb{Z}$?

1, 2, 4

E3. Mi a $z = \cos 75° + i \sin 75°$ komplex szám rendje?

24

E4. Hány irreducibilis tényező szorzatára bomlik $\mathbb{R}[x]$-ben az az 5-ödfokú polinom, amelynek $1 + 2i$ kétszeres gyöke?

3

E5. Mi az $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátavektora a $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ bázisban?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E6. Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (-1, 1, 0, 1)$ és $\mathbf{b} = (1, -1, 1, -1)$ vektorok hosszát és szögét!

$|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi = 150°$.

E7. Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $|A| = 2$, $|B| = 5$. Mi a $2A^{-1}B^2$ mátrix determinánsa?

100

E8. Mennyi a rangja az AB és a BA mátrixnak, ha

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I & -I \end{array}\right] \text{ és } B = \left[\begin{array}{c} I \\ \hline I \end{array}\right]$$

blokkmátrixok, ahol I az $n \times n$-es egységmátrix?

$AB = 0 \Rightarrow r(AB) = 0.$

$BA = \left[\begin{array}{c|c} I & -I \\ \hline I & -I \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{c|c} I & -I \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$

$r(BA) = n.$

1. Oldjuk meg az $56x \equiv 140 \pmod{119}$ kongruenciát, és adjuk meg az összes -20 és 50 közötti megoldását!

$x \equiv 11 \pmod{17}$,
azaz $x \equiv 11, 28, 45, 62, 79, 96, 113 \pmod{119}$
-20 és 50 között: $-6,\ 11,\ 28,\ 45.$

2. Adjuk meg a 12x+29y=11 diofantoszi egyenlet összes megoldását!

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 13 & + & 29t \\ y & = & -5 & - & 12t \end{array} \qquad (t \in \mathbb{Z})$$

3. Bontsuk fel az $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^2 + 2$ polinomot $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_5[x]$-ben irreducibilis tényezők szorzatára!

$\mathbb{Q}[x]$-ben $f(x) = (x+1)(x^4 - 2x + 2)$, és a negyedfokú irred. a Sch–E. miatt, $p = 2$-vel.
$\mathbb{Z}_5[x]$-ben $f(x) = (x+1)^2(x^3 - x^2 + x + 2)$, és a harmadfokúnak nincs gyöke ($0, \pm 1, \pm 2$ egyike sem gyök), így irred.

4. Írjuk fel az $f(a,b,c) = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ polinomot elemi szimmetrikus polinomok szorzataként! Mi az $f(a,b,c)$ értéke, ha a, b, c a $2x^3 - 2x^2 + 3$ polinom gyökei?

$(ab + ac + bc)^2 - 2abc(a + b + c)$
$0^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 1 = 3$

5. Határozzuk meg az alábbi A mátrix oszlopterének és nulltérének egy-egy bázisát! Az A mátrix bázisfelbontását felhasználva írjuk fel az A mátrixot $r(A)$ darab egy rangú mátrix összegeként!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{O}(A)$ egy bázisa: $\{(1,1,1), (2,0,1)\}$
$\mathcal{N}(A)$ egy bázisa: $\{(-1,1,1,0), (-1,2,0,1)\}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

6. Adjuk meg a tér z tengely körüli $+90°$-os forgatásának mátrixát a standard és a $\mathcal{B} = \{(1,0,1),\ (0,-1,1),\ (0,0,1)\}$ bázisban!

$$[f]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Számítsuk ki az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 1+i & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsát és inverzét!

$|A| = i$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1-i \\ 1+i & 0 & -1 \\ -1+i & -i & -i \end{bmatrix}$$

8. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer optimális közelítő megoldását!

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ -x + y &= 1 \\ y &= 1 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

A normálegyenlet: $\left[\begin{array}{rr|r} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{array}\right]$
$(x, y) = (0, 1/2)$
Vagy pszeudoinverzzel: $A^+ =$
$\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$