1. Bizonyítsuk be, hogy a $\binom{100}{50} = \frac{100!}{(50!)^2}$ szám nem osztható 7-tel! (*3 pont*)

Megoldás: 100! kanonikus alakjában a 7 kitevője $\left[\frac{100}{7}\right] + \left[\frac{100}{49}\right] = 14 + 2 = 16$,
50! kanonikus alakjában a 7 kitevője $\left[\frac{50}{7}\right] + \left[\frac{50}{49}\right] = 7 + 1 = 8$, tehát $(50!)^2$-ben $2 \cdot 8 = 16$.
Így egyszerűsítés után a $\binom{100}{50} = \frac{100!}{(50!)^2}$ egész szám kanonikus alakjában már nem szerepel a 7.

2. Adjuk meg a 84x+133y=14 diofantoszi egyenlet általános megoldását, és azt a megoldást, amelyre $x + y \geq 0$ minimális! (*4 pont*)

Megoldás:

		84	133
	133	0	1
$-1\cdot$	84	1	0
$-1\cdot$	49	-1	1
$-1\cdot$	35	2	-1
$-2\cdot$	14	-3	2
$-2\cdot$	7		
	0		

Tehát $(84, 133) = 7$, és 14 már egy korábbi sorban előállt, így nem kellett tovább a kibővített algoritmust folytatni.
Egy megoldás $(x_0, y_0) = (-3, 2)$, az összes pedig $x = -3 + \frac{133}{7}t = -3 + 19t$ és $y = 2 - \frac{84}{7}t = 2 - 12t$ $(t \in \mathbb{Z})$.
Erre $x + y = -1 + 7t \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \lceil \frac{1}{7} \rceil = 1$, tehát a minimális $x + y \geq 0$ értéket adó megoldás $(x, y) = (16, -10)$.

3. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$\begin{aligned} x &\equiv -1 \pmod 5 \\ x &\equiv 4 \pmod 6 \\ x &\equiv 2 \pmod 7 \end{aligned}$$

(*3 pont*)

Megoldás:

m_i	5	6	7
M_i	42	35	30
$x_i \equiv M_i^{-1}(m_i)$	3	-1	4
a_i	-1	4	2

$x \equiv 42 \cdot 3 \cdot (-1) + 35 \cdot (-1) \cdot 4 + 30 \cdot 4 \cdot 2 = -126 - 140 + 240 = -26 \pmod{210}$.

4. Számítsuk ki a $175^{75} \bmod 57$ számot! (*3 pont*)

Megoldás: $175^{75} \equiv 4^{75} \pmod{57}$, és $(4, 57) = 1$, így a kitevő is egyszerűsíthető. $\varphi(57) = \varphi(3 \cdot 19) = 2 \cdot 18 = 36$, és $75 \equiv 3 \pmod{36}$, így $4^{75} \equiv 4^3 \equiv 64 \equiv 7 \pmod{57}$.
Vagyis $175^{75} \bmod 57 = 7$.

5. Legyen $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Számítsuk ki a z^3 köbgyökeit és azok rendjét! (*4 pont*)

Megoldás: z^3 egyik köbgyöke nyilvánvalóan maga z, és így az összeset megkaphatjuk z-nek a harmadik egységgyökökkel való szorzataként.
$z = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$, és ebből a z^3 három köbgyöke trigonometrikus alakban
$\cos\left(\frac{7\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right)$, ahol $k = 0, 1, 2$.
Ezek 1 hosszú komplex számok, amelyeknek a szöge $\frac{7\pi}{6} = \frac{7}{12}2\pi$, $\frac{11\pi}{6} = \frac{11}{12}2\pi$, és $\frac{15\pi}{6} = \frac{5\pi}{2} = \frac{5}{4}2\pi$, és így a gyökök rendje 12, 12 és 4.

6. Osszuk el az $f(x) = x^5+2x^2+x+1$ polinomot maradékosan a $g(x) = x^2+x-2$ polinommal! *(3 pont)*

Megoldás:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
(x^5 & & & +2x^2 & +x & +1) & : (x^2+x-2) \;= x^3 - x^2 + 3x - 3 \\
-(x^5 & +x^4 & -2x^3) & & & & \\
\hline
 & -x^4 & +2x^3 & +2x^2 & +x & +1 & \\
 & -(-x^4 & -x^3 & +2x^2) & & & \\
\hline
 & & 3x^3 & & +x & +1 & \\
 & & -(3x^3 & +3x^2 & -6x) & & \\
\hline
 & & & -3x^2 & +7x & +1 & \\
 & & & -(-3x^2 & -3x & +6) & \\
\hline
 & & & & 10x & -5 &
\end{array}
$$

Tehát $x^5 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + x - 2)(x^3 - x^2 + 3x - 3) + (10x - 5)$.