1. Bontsuk fel az $f(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 2$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_3[x]$-ben! *(4 pont)*

Megoldás: Az $f(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 6x^2 + 2$ polinomnak a racionális gyökteszt szerint csak $\pm 1, \pm 2$ lehetnek racionális gyökei. Könnyen látható, hogy 1 valóban gyök. Emeljük ki $(x-1)$-et Horner-módszerrel! A hányadosnak is gyöke az 1, ezért tovább osztjuk.

	1	−2	5	−6	0	2
1	1	−1	4	−2	−2	0
1	1	0	4	2	0	

$f(x) = (x-1)^2(x^3 + 4x + 2)$, és nem kell tovább gyököket keresnünk, mert $x^3 + 4x + 2$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött a Sch–E kritérium miatt $p = 2$-re.
Az $f(x) = (x-1)^2(x^3 + 4x + 2)$ felbontás $\mathbb{Z}_3$ fölött is jó, de meg kell néznünk, hogy $x^3 + 4x + 2 = x^3 + x - 1$ tovább bontható-e. Mivel a -1 gyöke ennek $\mathbb{Z}_3$-ban: $-1 - 1 - 1 = -3 = 0$, $(x+1)$-et kiemelhetjük.

	1	0	1	−1
−1	1	−1	−1	0

$f(x) = (x-1)^2(x+1)(x^2 - x - 1)$, és az $x^2 - x - 1$ polinomnak $0, \pm 1$ egyike sem gyöke $\mathbb{Z}_3$-ban, ezért (másodfokú lévén) irreducibilis.

2. Számítsuk ki a $\Phi_{10}(x)$ körosztási polinomot, és (ennek felhasználásával) adjuk meg a primitív 10. egységgyökök négyzetösszegét! *(4 pont)*

Megoldás: $\Phi_{10}(x) = \dfrac{x^{10} - 1}{\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_5(x)} = \dfrac{x^{10} - 1}{(x^5 - 1)\Phi_2(x)} = \dfrac{x^5 + 1}{x + 1} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$
Ennek a polinomnak a gyökei a primitív 10. egységgyökök, legyenek ezek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$. Ekkor a Viète-formulák szerint

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 1$$

$$\sum_{1 \le i < j \le 4} \varepsilon_i \varepsilon_j = 1.$$

Tehát $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 = (\sum_i \varepsilon_i)^2 - 2(\sum_{i<j} \varepsilon_i \varepsilon_j) = 1^2 - 2 = -1.$

3. Az a, b paraméterek értékétől függően hány megoldása van az alábbi kibővített mátrixszal megadott egyenletrendszernek?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & a \\ -2 & 0 & a-4 & b \end{array}\right]$$

(4 pont)

Megoldás: Hozzuk a mátrixot lépcsős alakra.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & a \\ -2 & 0 & a-4 & b \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & a-1 \\ 0 & 2 & a & b+2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & a-1 \\ 0 & 0 & a+1 & b-a+3 \end{array}\right]$$

Ha $a + 1 \neq 0$, azaz $a \neq -1$, akkor egyetlen megoldás van, mert minden oszlopban van vezérelem, és nincs ellentmondásos sor.
Ha $a + 1 = 0$ és $b - a + 3 = 0$, azaz $a = -1$ és $b = -4$, akkor végtelen sok megoldás van (illetve tetszőleges test fölött annyi, amennyi a test elemszáma).
Ha $a = -1$ és $b \neq -4$, akkor a harmadik sor ellentmondásos, így nincs megoldás.

4. Legyen $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,2,-1),(2,1,2)\}$ az $\mathbb{R}^3$ egy bázisa. Írjuk fel a $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ és $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ áttérési mátrixokat! (*3 pont*)

Megoldás:

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. a) Adjuk meg az alábbi A mátrix oszlopterének és nullterének egy-egy bázisát!
b) Bázisfelbontás segítségével bontsuk fel az A mátrixot 1 rangú mátrixok összegére!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

(*5 pont*)

Megoldás: a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Így az oszloptér (egyik) bázisa az A első két oszlopa: $\{(1,2,0),(0,1,1)\}$, a nulltér bázisát pedig meghatározhatjuk az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásának vektoros alakjából.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s-2t \\ -3s+4t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát $\mathcal{N}(A)$ egy bázisa $\{(1,-3,1,0),\ (-2,4,0,1)\}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} [1\ 0\ -1\ 2] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [0\ 1\ 3\ -4] =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$