1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV _____ **NEPTUNKÓD** _____

Bevezetés az algebrába 1 **1. vizsga – elmélet** **2020-12-22**

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Ha $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor az $\{na + mb \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ halmaz megegyezik az (a, b) egész számú többszöröseinek halmazával. ☐

b) Két primitív n-edik egységgyök szorzata primitív n-edik egységgyök. ☐

c) Van olyan $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinom, amely $\mathbb{R}[x]$-ben irreducibilis, de $\mathbb{Q}[x]$-ben nem. ☐

d) Az $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$ polinom szimmetrikus polinom! ☐

e) Van négy olyan $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^4$ vektor, melyek közül bármely három lineárisan független, de együtt mégis lineárisan összefüggők. ☐

f) Egy mátrix sortere nem változik elemi sorműveletek közben. ☐

2. Hány megoldása van a $15x \equiv 12 \pmod{24}$ kongruenciának modulo 24? *(2 pont)*

3. Mennyi a primitív 99-edik egységgyökök száma? *(2 pont)*

4. A $2x^3 + 6$ polinom a $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ és $\mathbb{R}[x]$ gyűrűk közül melyikben irreducibilis, melyikben nem?

5. Hány olyan legföljebb harmadfokú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinom van, amelyre $f(0) = f(1) = f(2) = 1$? *(2 pont)*

6. Ha $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixok, melyekre $|A| = 2$ és $|B| = 3$, akkor mi az $3A^TB^{-1}$ mátrix determinánsa? *(2 pont)*

7. Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Mi lehet az $r(A)$ rang értéke, ha $r(AB) = 1$ és $r(BA) = 0$? *(2 pont)*

8. Mi a sík origón átmenő, $\mathbf{v}$-vel párhuzamos egyenesre való vetítésének mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ bázisban, ha $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$? *(2 pont)*

9. Definiáljuk egy $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bázis szerinti mátrixát a koordinátavektorokon való hatásával! Mi ennek a mátrixnak az i. oszlopa? *(3 pont)*

10. Definiáljuk a primitív polinomot. Adjunk példát $\mathbb{Z}[x]$-ben
a) primitív polinomra, amelynek semelyik együtthatója nem ± 1, illetve
b) nem primitív polinomra. *(3 pont)*

11. Definiáljuk a K^n vektortér affin alterét! Adjunk példát olyan affin altérre, amely nem altér! *(2 pont)*

12. Mondjuk ki a fordított Schönemann–Eisenstein-kritériumot! *(2 pont)*

13. a) Mi a feltétele az $ax + by = c$ $(a, b, c \in \mathbb{Z},\ a, b \neq 0)$ diofantoszi egyenlet megoldhatóságának, és milyen alakban kapjuk meg egy (x_0, y_0) megoldásból az összeset?
b) A tétel bizonyítását követve (magát a tételt nem felhasználva) lássuk be, hogy a $28x + 35y = 133$ diofantoszi egyenletnek minden megoldása felírható $(x, y) = (1 + 5t, 3 - 4t)$ alakban, ahol $t \in \mathbb{Z}$. *(5 pont)*

14. Tekintsük az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ahol $A \in K^{n \times n}$ invertálható, és $\mathbf{b} \in K^n$. Írjuk fel és bizonyítsuk be a Cramer-szabály által adott képletet az $\mathbf{x}$ megoldás x_i komponenseire. *(5 pont)*