

Gyakorló feladatok

1.
 - a) Bizonyítsuk be, hogy egy rendezett halmaz akkor és csak akkor jólrendezett, ha nincs benne végtelen, szigorúan leszálló lánc!
 - b) Mutassuk meg, hogy jólrendezett halmaz minden részhalmaza jólrendezett!
 - c) Bizonyítsuk be, hogy ha egy rendezett halmaz véges sok jólrendezett részhalmazának az uniója, akkor maga is jólrendezett!
 - d) Tegyük fel, hogy az A rendezett halmaz az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ jólrendezett halmazok uniója, és ha $x \in A_i, y \in A_j, i < j$, akkor $x < y$. Lássuk be, hogy ekkor A jólrendezett! Adjunk meg \mathbb{R} -ben ilyen rendezésű részhalmazt!
 - e) Bizonyítsuk be, hogy \mathbb{Z} nem jólrendezett a szokásos rendezésével, és adjunk meg rajta egy másik rendezést, ami jólrendezés!
2. Igazoljuk, hogy
 - a) $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$
 - b) $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$
3. Határozzuk meg az első n Fibonacci-szám összegét!
4. Hány olyan n -hosszú sorozat képezhető az 1, 2, 3, 4 számokból, melyek 1-gyel kezdődnek, és minden szám pontosan 1-gyel különbözik az előzőtől? (Útmutatás: Lássuk be, hogy erre is érvényes a Fibonacci-rekurzió!)
5. Legyen $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$, $g_0 = a$, $g_1 = b$ (általánosított Fibonacci-sorozat). Igazoljuk, hogy $g_n = af_{n-1} + bf_n$.
6. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy $\sum_{k=0}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$.
7. Írjuk fel a $\sqrt{3}$ számot lánctört alakban! Számítsuk ki az ebből kapott első négy közelítő racionális számot és a közelítés hibáját. ($\sqrt{3} \approx 1,732$.) Ellenőrizzük, hogy jól közelítenek-e ezek a számok az irracionális számok approximációs tétele értelmében (azaz teljesül-e, hogy $|\sqrt{3} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$)?

Házi feladatok

Beadási határidő: szeptember 13.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Mely halmazok jólrendezett halmazok az alábbiak közül? Az indoklásban használhatjuk a gyakorló feladatsor állításait.
 - a) páros számok,
 - b) pozitív páros számok,
 - c) a $[0, 1]$ intervallumba eső számok,
 - d) egész számok négyzetei,
 - e) egész számok köbei.
2. Igazoljuk, vagy adjunk ellenpéldát!
 - a) két racionális szám összege racionális,
 - b) egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális,
 - c) két irracionális szám összege irracionális.
3. Mennyi az értéke a következő kifejezéseknek?
 - a) $\lceil \lfloor \frac{3}{4} \rfloor + \lfloor -\frac{3}{4} \rfloor \rceil$,
 - b) $\lfloor \lceil \frac{3}{4} \rceil + \lceil -\frac{3}{4} \rceil \rfloor$,
 - c) $\{\frac{7}{4}\} + \{-\frac{7}{4}\} + \{-1\}$,
 - d) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ ($x \in \mathbb{R}$)
4. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy az n -edik Fibonacci-szám

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

5. Legyen a_n azon n -hosszú 0-1-sorozatok száma, amelyben nincs két 0 egymás mellett. Keressünk rekurziót az a_n -re. Mi a kapcsolata az a_n sorozatnak a Fibonacci-sorozattal?
6. Keressük meg azt a legkisebb $q \geq 5$ természetes számot, amelyhez van olyan $p \in \mathbb{Z}$, hogy

$$\left| \sqrt{3} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

(A számoláshoz használhatjuk a $\sqrt{3} \approx 1,732$ becslést. Vigyázat! Nem minden jó közelítés származik a lánctört alakból!)

- 7*. Bontsuk fel
 - a) a nemnegatív racionális számok halmazát
 - b) a racionális számok halmazát
 jólrendezett végtelen halmazok diszjunkt uniójára!