Gyakorló feladatok

1. Hány olyan egész szám van 1 és 4000 között, amely sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható?

2. Horner-módszerrel helyettsítsük be 5-öt a $p(x) = x^5 - 3x^2 + x + 3$ polinomba!

3. Adjuk meg 120201_3-at tízes számrendszerben Horner módszerrel!

4. a) Váltsuk át 26-ot $10, 16, 8, 4, 2, 5, 26$ alapú számrendszerbe!
b) Váltsuk át 1001-et 2-es, 8-as és 16-os számrendszerbe!

5. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal $(288, 204)$-et, és állítsuk elő a legnagyobb közös osztót $288x + 204y$ alakban alkalmas $x, y \in \mathbb{Z}$-vel!

6. Megoldhatók-e az alábbi diofantoszi egyenletek? Ha igen, adjuk meg az összes megoldásukat, illetve az összes nemnegatív megoldásukat!
a) $288x + 204y = 182$
b) $288x + 204y = 3000$

7. Ha $(a, b) = 5$, mi lehet $(3a - b, a + b)$? Adjunk is példát mindegyik esetre!

8. Bizonyítsuk be, hogy minden $a > 1$, $m, n \geq 1$ egész számra $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

Házi feladatok

Beadási határidő: szeptember 20.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Adjuk meg 4321_5 és 1011001110_2 értékét 10-es számrendszerben (Horner-módszerrel), és a 333 szám 8-as, 2-es, 16-os, valamint 5-ös számrendszerbeli alakját!

2. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal $(324, 276)$ értékét, és keressünk olyan x és y egész számokat, melyekre $324x + 276y = (324, 276)$.

3. Írjuk fel a $155x+195y = 5000$ diofantoszi egyenlet általános megoldását! Hány 155 forintos és hány 195 forintos árut vásároltunk, ha épp 5000 forintot fizettünk? (Ebben az esetben $x, y \geq 0$.)

4. Bizonyítsuk be, hogy a szomszédos Fibonacci-számok relatív prímek!

5. Mutassuk meg, hogy $n! + 1$-nek minden prímosztója n-nél nagyobb ($n \in \mathbb{N}^+$)! Vezessük le ebből, hogy végtelen sok prímszám van!

6. a) Bizonyítsuk be, hogy a pozitív páros számok körében fel lehet írni minden számot felbonthatatlanok szorzataként, de ez a felbontás nem egyértelmű (adjunk ellenpéldát)!
b) Mi az az $\mathbb{N}^+$-beli felbontás egyértelműségének bizonyításában, ami itt nem működik?

7*. A Nim nevű játékot néhány kupac gyufaszállal játssza két játékos. Felváltva elvesznek néhány (legalább egy, de akár az összes) gyufaszálat az egyik kupacból. Az nyer, akié az utolsó gyufaszál. Adott méretű kupacok mellett melyik játékosnak van nyerő stratégiája? [Útmutatás: írjuk fel a kupacok méretét binárisan, majd e számokat írjuk egymás alá helyiérték szerint. Igazoljuk, hogy a második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha minden helyiértéken páros az 1-esek száma.