Gyakorló feladatok

1. a) Mi a 2 kitevője 17! kanonikus alakjában?
b) Hány nullára végződik a 100! szám?

2. Határozzuk meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!
a) $2^{23}3^{10}7^{13}$, $2^{15}7^{10}13^5$
b) $2^{23}3^{10}7^{13}$, $2^{15}7^{10}13^5$, $3^{15}7^{20}11^2$.

3. Mutassuk meg, hogy bármely pozitív a és b egészhez van olyan m és n egész, hogy $m \mid a$, $n \mid b$, $(m, n) = 1$ és $mn = [a, b]$.

4. Mutassuk meg, hogy
a) $4k + 1$ alakú számok szorzata $4k + 1$ alakú;
b) végtelen sok $4k + 3$ alakú prímszám van! (Útmutatás: Milyen prímosztói lehetnek a $4n! - 1$ számnak?)

5. A páros számok körében definiált oszthatóságra nézve mely számok írhatók fel lényegében egyértelműen felbonthatatlanok szorzataként?

6. Határozzuk meg 2^{67} mod 71 értékét!

7. Határozzuk meg azokat az n pozitív egészeket, amelyekre $\varphi(n) = 6$.

8. Oldjuk meg a következő lineáris kongruenciákat!
a) $12x \equiv 15 \pmod{21}$
b) $12x \equiv 4 \pmod{6}$
c) $12x \equiv 4 \pmod{2}$
d) $30x \equiv 4 \pmod{37}$

9. a) Határozzuk meg 5^{-1} mod 26 értékét!
b) Invertálható-e 4 modulo 26?

10. Bizonyítsuk be Wilson tételét: $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$ minden p prímre.

Házi feladatok

Beadási határidő: szeptember 27.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Hány 0-ra végződik az 1234! szám?

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $a, b > 1$ egész számra

$$[a, b] \mid a + b \Leftrightarrow a = b.$$

3. Számítsuk ki 25^{105} mod 11 értékét!

4. Oldjuk meg a következő lineáris kongruenciákat!
a) $4x \equiv 6 \pmod{14}$,
b) $4x \equiv 6 \pmod{16}$,
c) $4x \equiv 8 \pmod{16}$.

5. Számítsuk ki 3^{-1} mod 13, 3^{-1} mod 26 és 3^{-1} mod 52 értékét!

6. Melyek azok a pozitív egész n-ek, amelyekre $\varphi(n) = 4$? (Használjuk a φ kanonikus alakját!)

7*. Adott $m \in \mathbb{N}^+$-ra határozzuk meg az összes olyan b egész számot, amelyre

$$\{\, t_1 + b,\ t_2 + b,\ \ldots,\ t_{\varphi(m)} + b \,\}$$

redukált maradékrendszer modulo m, ha $\{\, t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{\varphi(m)} \,\}$ redukált maradékrendszer modulo m!