

## Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{8}$$

$$x \equiv -4 \pmod{11}$$

2. Határozzuk meg az alábbi értékeket:

a)  $\varphi(23)$ ,  $\varphi(21)$ ,  $\varphi(63)$ ,  $\varphi(10!)$ ,

b)  $120^{24} \pmod{23}$ ,  $115^{21} \pmod{21}$ ,  $68^{111} \pmod{63}$ ,  $111^{68} \pmod{63}$ . Vigyázzunk, 111 nem relatív prím a 63-hoz!

c)  $3^{3^{3^4}}$  utolsó két számjegye.

3. Készítsük el a  $\mathbb{Z}_5$  és  $\mathbb{Z}_6$  gyűrűk összeadás- és szorzástábláját!

Készítsük el a mod 6 redukált maradékosztályok csoportjának,  $\mathbb{Z}_6^*$ -nak a szorzástábláját!

4. Bizonyítsuk be, hogy a  $P(H)$  hatványhalmaz a szimmetrikus differencia  $((A \cup B) \setminus (A \cap B))$  és metszet műveletekkel kommutatív, egységelemes gyűrűt alkot!

5. Adjuk meg az alábbi komplex számok algebrai alakját:

a)  $(3 - 4i)(7 + 8i)$

b)  $(3 - 4i)/(2 - i)$

c)  $i^{199}$

d)  $(1 + i)^9$

6. Legyen  $z = 1 + 3i$  és  $u = 2 - i$ . Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:

a)  $z\bar{z}$

b)  $u/\bar{u}$

c)  $|z - u|$

d)  $|2z - zu|$

e)  $|u/z\bar{u}^3|$ .

7. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a

$$z^2 + 2iz - 1 + i = 0$$

egyenletet!

8. Mi a mértani helye a síkon azon pontoknak, amelyeknek megfelelő  $z$  komplex számokra:

a)  $|z - 5 + i| = 2$

b)  $|z - i| = |z + i|$

c)  $|(z - 3 + 4i)/(z - i)| \geq 1$

d)  $|z| = 3iz$

e)  $|z| = iz$

f)  $z + \bar{z} < 4$ .

**Házi feladatok**

Beadási határidő: október 4.

*A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!*

1. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$x \equiv 1 \pmod{13}$$

$$x \equiv 1 \pmod{4}$$

$$x \equiv -1 \pmod{5}$$

2. Egyszerűsítsük a  $356^{365} \pmod{175}$  hatványt az Euler–Fermat-tétel segítségével (indokoljuk is, miért használható erre az E–F.-tétel), majd számoljuk ki az értékét!
3. Készítsük el a modulo 12, illetve modulo 8 redukált maradékosztályok csoportjának,  $\mathbb{Z}_{12}^*$ -nak és  $\mathbb{Z}_8^*$ -nak a szorzástábláját!
4. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a

$$z^2 + 4iz - 3 = 0$$

egyenletet!

5. Határozzuk meg a  $(3 + i)^{20}$  és a  $\frac{(2 + 5i)^{101}}{(2 - 5i)^{99}}$  komplex szám **abszolút értékét!**
6. Mi a mértani helye a síkon azoknak a pontoknak, amelyeknek megfelelő  $z$  komplex számokra:
- $|z - 1 + i| > 1$
  - $z - \bar{z} = 2i$
- 7\*. Bizonyítsuk be, hogy  $\varphi(n!)$  pontosan akkor nem osztható  $n$ -nel, ha  $n$  prím!