

## Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg  $x^3 - 2x^2 + x - 1$  és  $x^2 + 2$  legnagyobb közös osztóját, és állítsuk elő a legnagyobb közös osztót ezen polinomok polinomegyütthetős lineáris kombinációjaként a kibővített euklideszi algoritmus segítségével!
2. Határozzuk meg az alábbi polinomok gyökeit, és bontsuk fel a polinomokat irreducibilis tényezők szorzatára  $\mathbb{C}[x]$ -ben,  $\mathbb{R}[x]$ -ben és  $\mathbb{Z}_5[x]$ -ben!
  - a)  $2x^3 - 7x^2 + 2$
  - b)  $x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$
  - c)  $x^5 + 1$
3. Adjuk meg  $\mathbb{Z}_2$  és  $\mathbb{Z}_3$  fölött az irreducibilis másodfokú polinomokat!
4. Adjuk meg azt a legalacsonyabb fokú 1 főegyütthetős
  - a) komplex együtthetős
  - b) valós együtthetőspolinomot, amelynek  $i$  kétszeres, 1 háromszoros gyöke!
5. Határozzuk meg az  $(x - 2)^2(x + i)^5(x - 3)(x - 4)^2$  és az  $(x - 2)(x + i)^2(x - 3)^3$  polinomok legnagyobb közös osztóját!
6. Mutassuk meg, hogy páratlan fokú valós együtthetős polinomnak van valós gyöke!
7. Határozzuk meg az  $a$  együtthetőt úgy, hogy  $-1$  legalább kétszeres gyöke legyen az

$$x^5 - ax^2 - ax + 1$$

polinomnak!

8. Adjuk meg az alábbi polinomok komplex gyöktényezős alakját!
  - a)  $x^3 - 1$
  - b)  $x^n + 1$
  - c)  $x^4 + x^2 + 1$
9. Mutassuk meg, hogy egy racionális együtthetős,  $\mathbb{Q}$  fölött irreducibilis polinomnak nem lehet  $\mathbb{C}$ -ben többszörös gyöke!

**Házi feladatok**

Beadási határidő: október 18.

*A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!*

1. Határozzuk meg az  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 2$  és  $g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$  polinomok legnagyobb közös osztóját, és állítsuk elő a legnagyobb közös osztót  $u(x)f(x) + v(x)g(x)$  alakban a kibővített euklideszi algoritmus segítségével!
2. Bontsuk fel az  $x^8 - 1$  polinomot  $\mathbb{C}$ , illetve  $\mathbb{R}$  fölött irreducibilis polinomok szorzatára!
3. Határozzuk meg az összes irreducibilis harmadfokú polinomot  $\mathbb{Z}_2$  fölött!
4. Határozzuk meg azokat a  $c \in \mathbb{Z}$  számokat, amelyekre az  $x^3 + 2x^2 + cx + 4$  polinomnak van racionális gyöke!
5. Bontsuk fel az  $f(x) = 6x^5 + 9x^4 + 2x^3 - 1$  polinomot  $\mathbb{Q}[x]$ -ben és  $\mathbb{Z}_7[x]$ -ben irreducibilis tényezőik szorzatára!
6. Legyen  $K$  test, és tegyük fel, hogy  $f, g \in K[x]$ ,  $\deg f = 3$ ,  $\deg g = 2$ , és  $(f, g) \neq 1$ . Lássuk be, hogy ekkor  $f$ -nek van gyöke  $K$ -ban!
- 7\*. Keressük meg az összes egységet (azaz invertálható elemet)  $\mathbb{Z}_4[x]$ -ben!