

## Gyakorló feladatok

1. Hány irreducibilis tényező szorzatára bomlik az  $f(x) = -6x^3 + 6x^2 - 12$  polinom  $\mathbb{Q}[x]$ -ben,  $\mathbb{Z}[x]$ -ben,  $\mathbb{R}[x]$ -ben, illetve  $\mathbb{C}[x]$ -ben?
2. Határozzuk meg az  $f(x) = -6x^3 + 6x^2 - 12$  és a  $g(x) = 3x^2 - 3x - 6$  polinomok legnagyobb (azaz kitüntetett) közös osztóját  $\mathbb{Q}[x]$ -ben és  $\mathbb{Z}[x]$ -ben!
3. Irreducibilis-e az  $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3$  polinom  $\mathbb{R}$  fölött,  $\mathbb{Q}$  fölött és  $\mathbb{Z}_2$  fölött?
4. Bontsuk fel a

$$2x^6 - x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x + 5$$

polinomot irreducibilis polinomok szorzatára  $\mathbb{Q}[x]$ -ben és  $\mathbb{Z}_5[x]$ -ben!

5. Határozzuk meg az  $x^3 + 3x^2 + 9x + 5$  polinom gyökeit a Cardano-képlet segítségével!
6. Lássuk be, hogy ha  $p$  páratlan prím, akkor  $\Phi_{2p}(x) = \Phi_p(-x)$ , és bizonyítsuk be ennek a polinomnak az irreducibilitását!
7. Tekintsük a  $\Phi_{12} = x^4 - x^2 + 1$  körosztási polinomot.
  - a) Bizonyítsuk be, hogy  $\Phi_{12}(ax + b)$  semelyik  $a, b \in \mathbb{Z}$ -vel ( $a \neq 0$ ) nem teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritériumot!
  - b) Bizonyítsuk be, hogy  $x^4 - x^2 + 1$  reducibilis minden  $\mathbb{Z}_p$  fölött!
  - c) Lássuk be  $\Phi_{12}(x)$  irreducibilitását más módszerrel!
8.
  - a) Bizonyítsuk be, hogy ha  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ , és  $a, b \in \mathbb{Z}$ , akkor  $a - b \mid f(a) - f(b)$ .
  - b) Keressünk olyan egész együtthatós polinomot, amelyre  $\{f(-2), f(1), f(3)\} = \{2, 6, 11\}$  (nem feltétlenül ebben a sorrendben)!
9. Legyenek  $a, b, c$  az  $x^3 - 2x^2 + 4x + 6$  polinom gyökei  $\mathbb{C}$ -ben. Adjunk meg egy harmadfokú polinomot, amelynek gyökei  $a + b$ ,  $a + c$  és  $b + c$ . (Ne számítsuk ki a gyököket, használjuk a gyökök és együtthatók közti összefüggéseket!

**Házi feladatok**

Beadási határidő: október 25.

*A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!*

1. Oldjuk meg Cardano-képlettel az  $x^3 + 12x - 12 = 0$  egyenletet!
2. Bontsuk fel az  $f(x) = x^6 - 7x^4 + 12x^2 + 2x - 4$  polinomot irreducibilisek szorzatára  $\mathbb{Q}[x]$ -ben és  $\mathbb{Z}_5[x]$ -ben!
3. Bizonyítsuk be, hogy az  $f(x) = x^3 + 2x + 1$  polinom irreducibilis  $\mathbb{Q}[x]$ -ben, de semelyik  $a \in \mathbb{Z}$  számmal nem teljesíti az  $f(x + a)$  polinom a Schönemann–Eisenstein-kritériumot!
4. Számítsuk ki a  $\Phi_9(x)$  körosztási polinomot, és bizonyítsuk be, hogy  $\Phi_9(x)$  irreducibilis  $\mathbb{Q}[x]$ -ben!
5. Adjuk meg azt a legkisebb fokú racionális együtthatós  $f(x)$  polinomot, amelyre  $f(0) = f(1) = f(2) = 2$ , és  $f(-1) = 5$ .
6. Legyen  $a, b, c$  az  $2x^3 - x^2 + 3x + 6$  polinom három gyöke  $\mathbb{C}$ -ben. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét:
  - a)  $a + b + c$
  - b)  $abc$
  - c)  $a^2 + b^2 + c^2$
- 7\*. Határozzuk meg azokat a  $c \in \mathbb{Z}$  számokat, amelyekre az  $x^3 + 5x^2 + 2cx + c$  polinomnak van racionális gyöke!