Gyakorló feladatok

1. Legkevesebb hány tagja van az $f(x,y,z) = xy^3z - 2x^2y^3 + \ldots$ szimmetrikus polinomnak? Írjuk fel ezt a minimális tagszámú polinomot úgy, hogy a tagjai lexikografikusan legyenek rendezve! Állítsuk elő elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként is!

2. Legyenek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ a komplex primitív ötödik egységgyökök. Írjuk fel azt az 1 főegyütthatós polinomot, amelynek gyökei az $\varepsilon_i\varepsilon_j$ számok $(1 \le i < j \le 4)$! Bontsuk fel ezt a polinomot $\mathbb{Q}[x]$-ben irreducibilisek szorzatára!
Hogyan általánosíthatnánk ezt p-edik primitív egységgyökökre, ahol p tetszőleges prím?

3. Az alábbi mátrixok közül melyek vannak lépcsős, illetve redukált lépcsős alakban? A redukált lépcsőseknél írjuk fel a mátrixhoz tartozó lineáris egyenletrendszer megoldását!

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ e) $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ -x + y - z &= 2 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ 4x + 4y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 7x + 14y - 21z &= 7 \\ x + 2y - 3z &= 1 \\ 5x + 10y + 15z &= 5 \\ 3x + 6y - 9z &= 3 \end{aligned}$$

Ki tudunk-e választani az eredeti egyenletek közül kevesebbet, melyek ugyanezt a megoldást adják? Melyeket?

5. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek:
a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és egyértelmű a megoldása;
b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és nincs megoldása;
d) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van és pontosan 5 megoldása van (van-e ilyen valós, illetve véges test fölötti egyenletrendszer)?

6. Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő mátrixhoz tartozó valós egyenletrendszernek? Oldjuk meg a feladatot $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött is!

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -a & b \\ 1 & 3 & a & 0 \end{array}\right]$$

Házi feladatok

Beadási határidő: november 2.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Írjuk fel azt a homogén szimmetrikus $f(x, y, z)$ polinomot, amelynek egyik tagja y^3z úgy, hogy a tagok lexikografikusan legyenek rendezve. Ezután állítsuk elő f-et elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként!

2. Legyen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ az $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ polinom három gyöke. Hozzuk közös nevezőre, majd állítsuk elő az $f(x)$ együtthatóiból az $\frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$ kifejezést!

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ x - z &= -2 \\ 2x + y + z &= 7 \end{aligned}$$

4. Az alábbi mátrix egy olyan valós lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa, amelynek van megoldása. Írjunk be a $*$-ok helyére olyan (nem feltétlenül azonos!) számokat, hogy ez a mátrix redukált lépcsős alakú legyen! Indokoljuk is, hogy miért azokat a számokat írtuk! Adjuk meg a kapott egyenletrendszer megoldását!

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & 1 & * & 0 \\ * & * & -1 & * & 2 \\ 0 & 0 & 0 & * & 1 \end{array}\right]$$

5. Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi valós egyenletrendszernek?

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= -1 \\ x - y + 2z &= a \\ x + by + z &= 3 \end{aligned}$$

6. Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer. Döntsük el, melyek igazak az alábbiak közül:

a) Ha $k \le n$, akkor az egyeletrendszernek van megoldása.
b) Ha $k > n$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.
c) Ha $k < n$ és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása is van.
d) Ha $k > n$ és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor csak 1 megoldása van.
e) Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is.
f) Ha bármely $k - 1$ egyenletet kiválszatva az így kapott egyenletrendszernek van megoldása, akkor az eredetinek is van megoldása.

7*. Van-e olyan harmadfokú irreducibilis polinom $\mathbb{Q}[x]$-ben, amelyre igaz, hogy két ($\mathbb{C}$-beli) gyökének a szorzata a harmadik gyök?