Gyakorló feladatok

1. Legyen $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (0,2,-1), (1,1,0)\}$.
a) Lássuk be, hogy $\mathcal{B}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben!
b) Adjuk meg a $\mathbf{v} = (1,0,0)$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B}$ bázisra nézve!
c) Melyik az a $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ vektor, amelynek koordinátavektora a $\mathcal{B}$ bázisra nézve $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$?

2. Mennyi a rangja annak a valós $n \times n$-es mátrixnak, amelynek az elemei sorfolytonosan leolvasva $1, 2, \ldots, n^2$?

3. Mennyi lehet annak az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésnek a rangja, amelyre $0 \neq \operatorname{Im} f \leq \operatorname{Ker} f$? Adjunk példát ilyen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mátrixleképezésre!

4. Tekintsük a következő mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki a BC, CB, $5A$, $A + D$, AD, DA, $D^T D + A$ mátrixkifejezések közül azokat, amelyek értelmezve vannak!

5. Keressünk olyan 2×2-es és 3×3-as C valós mátrixokat, melyekre: $C^2 = 0$, de $C \neq 0$.

6. Mi történik egy $n \times n$-es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi mátrixokkal megszorozzuk?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

Beadási határidő: november 15.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Válasszuk ki az alábbi A mátrix oszlopterének egy bázisát az oszlopok közül, és írjuk fel mind az öt oszlop koordinátavektorát erre a bázisra nézve! Lehet-e más bázist is kiválasztani az oszlopok közül?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

2. Az 1. feladat A mátrixára adjuk meg A sorterének, nullterének és A^T nullterének is egy-egy bázisát!

3. Mennyi lehet annak az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésnek a rangja, amelyre $0 \neq \operatorname{Ker} f \leq \operatorname{Im} f$? Adjunk példát ilyen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mátrixleképezésre!

4. Határozzuk meg az alábbi A mátrix rangját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix}$$

5. Összesen legalább hány nemnulla eleme van az $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixoknak, ha AB-ben nincs nulla elem?

6. Keressük meg az összes olyan 2×2-es valós X mátrixot, amelyik felcserélhető az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal! (Írjuk át az $AX = XA$ mátrixegyenletet az X elemeire vonatkozó lineáris egyenletrendszerré!)

7*. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \in K^{n\times n}$, és $r(A) < n$, akkor van olyan $X \in K^{n\times n}$ mátrix, amelyre $r(X) = 1$, és $AX = XA$. (Még olyan 1 rangú X is van, hogy $AX = XA = 0$.) Lássuk be, hogy $r(A) = n$ esetén ez nem feltétlenül igaz, pl. az $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixra sem.