Gyakorló feladatok

1. Igazak-e minden $n \times n$-es A, B mátrixra az alábbi egyenlőségek?

a) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ b) $(A+I)(A-I) = A^2 - I^2$
c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ d) $(AB)^T = A^T B^T$

2. Írjuk fel az alábbi A mátrix bázisfelbontását, majd ezt felhasználva bontsuk fel a mátrixot $r(A)$ darab 1 rangú mátrix összegére!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Lineárisak-e a következő leképezések? Ha igen, mi a standard mátrixuk?

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + 1,\ 2,\ 3)$
b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + y,\ -y,\ 2x)$
c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|$
d) az $\mathbb{R}^3$ $90°$-os forgatása a z tengely körül
e) az $x + y - 2z = 0$ síkra való tükrözés
f) $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ahol f az $y = x$ egyenesre, g pedig az x tengelyre való tükrözés

4. a) Az előírhatósági tételt használva adjunk meg olyan $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ lineáris transzformációt, amelyre $0 \neq \operatorname{Im} f \leq \operatorname{Ker} f$.

b) Lássuk be, hogy bármilyen $U \leq V \leq K^3$ 1- és 2-dimenziós alterekre van olyan f lineáris transzformáció, amelyre $\operatorname{Im} f = U$ és $\operatorname{Ker} f = V$. Hány ilyen transzformáció van $K = \mathbb{Z}_3$ esetén?

5. Az $\mathbb{R}^3$ tér $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$ irányvektorú, origón átmenő egyenese körüli $90°$-os forgatásához keressünk három olyan független vektort, amelyeknek a képét könnyű meghatározni, és ennek segítségével írjuk fel a transzformáció standard mátrixát!

6. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét, ha van!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

7. Oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket, ha lehet! A, B, C, D az előző feladatban szereplő mátrixok.

a) $CX = D$ b) $BX = C$ c) $XB = M$, ahol $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ d) $XB = AM$

Házi feladatok

Beadási határidő: november 22.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Határozzuk meg az alábbi A mátrix bázisfelbontását, és ennek segítségével bontsuk fel az A mátrixot $r(A)$ darab 1 rangú mátrix összegére!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Hogyan változhat a mátrix rangja, ha egyetlen eleméhez 1-et hozzáadunk? Adjunk példát mindegyik esetre!

3. Adjuk meg az $\mathbb{R}^3$ tér azon lineáris transzformációjának a standard mátrixát, amelyet úgy kapunk, hogy először az $x = z$ síkra tükrözünk, majd a kapott vektort elforgatjuk a z tengely körül $+90°$-kal!

4. Keressünk három olyan független vektort az $\mathbb{R}^3$ tér $x + y - z = 0$ síkjára való merőleges vetítéshez, amelyeknek a képét könnyű meghatározni, és ennek segítségével írjuk fel a transzformáció standard mátrixát!

5. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Oldjuk meg az $XA = B$ és az $AY = C$ mátrixegyenletet, továbbá számítsuk ki az $A^T A^{-2}$ mátrix inverzét, ha A az előző feladatban szereplő mátrix, és

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7*. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix rangja n. Mely $\mathbf{v}$ vektorokra igaz, hogy az A bármely sorához hozzáadhatjuk $\mathbf{v}$ alkalmas skalárszorosát úgy, hogy a mátrix rangja csökkenjen?