Gyakorló feladatok

1. Tekintsük a $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(2,1,3),(1,2,4)\}$ bázist $\mathbb{R}^3$-ben. Mi a $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ és a $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ áttérési mátrix? Adjuk meg a $\mathbf{v} = (1,1,2)$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B}$ bázisra nézve!

2. Ha az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

akkor mi a mátrixa a $\mathcal{C} = \{\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\}$, illetve a $\mathcal{D} = \{\mathbf{b}_1, 2\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban?

3. Írjuk fel az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban!

a) Az $y = x$ egyenesre való tükrözés az $\mathbb{R}^2$ standard $\mathcal{E}$, továbbá a $\mathcal{B} = \{(1,1),(-1,1)\}$, illetve $\mathcal{C} = \{(1,1),(-2,0)\}$ bázisában;

b) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, a $\mathcal{B} = \{(1,2),(1,1)\}$ bázisban;

c) az origón átmenő $(1,2,-3)$ irányú egyenesre való merőleges vetítés tetszőleges, kényelmes bázisban (adjuk meg a választott bázist is).

4. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát elemi sorműveletek segítségével!

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

5. Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?

6. Számítsuk ki a következő $n \times n$-es determináns értékét! (Ötlet: a második sort vonjuk ki az összes többiből.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$$

7. Számítsuk ki a

$$\begin{bmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix}$$

determináns értékét! Hogyan lehet ezt általánosítani $n \times n$-es mátrixra? Mennyi a mátrix rangja az a, b, n értékektől függően?

Házi feladatok

Beadási határidő: november 29.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Tekintsük a $\mathcal{B} = \{(1,0,2,0),(0,1,3,2),(-1,2,0,3),(1,2,1,2)\}$ bázist $\mathbb{R}^4$-ben. Mi a $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ és a $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ áttérési mátrix? Adjuk meg a $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B}$ bázisra nézve!

2. Ha az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B} = \{\, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \,\}$ bázisban

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

akkor mi a mátrixa a $\mathcal{C} = \{\, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, -\mathbf{b}_3 \,\}$ bázisban?

3. Írjuk fel az $f(x, y.z) = (x-y+z,\ -2x+z,\ x+y)$ lineáris transzformáció standard mátrixát, és a $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(2,-1,2),(0,1,1)\}$ bázis szerinti mátrixát!

4. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát!

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Legyenek az $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix oszlopai rendre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, és tegyük fel, hogy $\det A = 4$, míg egy másik $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix determinánsa -3. Mi a determinánsa a következő mátrixoknak?

a) $2A^T$ b) $(3A)^{-1}B^4$ c) $[\,\mathbf{b} \mid \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \mid 3\mathbf{c}\,]$

6. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg A determinánsát! Hogyan lehet ezt általánosítani $n \times n$-es mátrixra? (Ötlet: adjuk az összes sort az elsőhöz, utána vonjuk ki minden oszlopból az előzőt, hátulról előrefelé.)

7*. Bizonyítsuk be, hogy K^n minden lineáris transzformációjához van K^n-nek olyan bázisa, amelyben a transzformáció mátrixának első oszlopában legföljebb egy nemnulla elem van, és az az első vagy a második elem. Mutassunk példát $\mathbb{R}^2$-ben olyan transzformációra, amelynek a kettő közül csak az egyik, illetve csak a másik típusú mátrixa van.