

Gyakorló feladatok

1. Sorműveletek nélkül, csak inverziószámolással határozzuk meg az alábbi kigyók determinánsát!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát és inverzét aldeterminánsok segítségével:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat minél egyszerűbben!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c+d & c^2+d^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n \times n}$$

4. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját! Keressünk benne a rangnak megfelelő méretű nemnulla aldeterminánst!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Cramer szabály alkalmazásával oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Határozzuk meg az A mátrix LU-felbontását! Számítsuk ki ebből az A determinánsát és az $A\mathbf{x} = [1 \ -1 \ 0]^T$ egyenletrendszer megoldását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Adjuk meg az

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 2 \\ x + 2y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

valós egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen megoldását, és ennek felhasználásával írjuk fel az összes megoldást!

8. Határozzuk meg az $x - y = 1$, $x - y = 2$ ellentmondásos lineáris egyenletrendszer optimális közelítő megoldásait normálegyenlet segítségével! Határozzuk meg az egyetlen sortérbe eső (minimális abszolútértékű) optimális közelítő megoldást!

9. Határozzuk meg a következő mátrixok pszeudoinverzét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

10. Mutassuk meg, hogy általában nem igaz, hogy $(AB)^+$ egyenlő lenne B^+A^+ -szal. Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixokat!

11. Oldjuk meg a 8. feladatot az együtthatómátrix pszeudoinverzével való beszorzással is!