Gyakorló feladatok

1. *Hány olyan egész szám van* 1 *és* 4000 *között, amely sem* 2*-vel, sem* 3*-mal, sem* 5*-tel nem osztható?*

Megoldás: Vegyük észre először, hogy $n \geq 1$-re a $d \in \mathbb{N}^+$ számmal osztható egészek száma 1 és n között $\left[\frac{n}{d}\right]$, ui. ez azon $k \in \mathbb{N}^+$ egészek száma, amelyekre $1 \leq kd \leq n$, azaz $\frac{1}{d} \leq k \leq \frac{n}{d}$, vagyis $1 \leq k \leq \left[\frac{n}{d}\right]$.
Ha A a 2-vel, B a 3-mal, C az 5-tel osztható egészek száma az $[1, 4000]$ intervallumban, akkor a logikai szitaformula szerint

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| =& |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = \\ =& \left[\frac{4000}{2}\right] + \left[\frac{4000}{3}\right] + \left[\frac{4000}{5}\right] - \left[\frac{4000}{6}\right] - \left[\frac{4000}{10}\right] - \left[\frac{4000}{15}\right] + \left[\frac{4000}{30}\right] = \\ =& 2000 + 1333 + 800 - 666 - 400 - 266 + 133 = 2934,\end{aligned}$$

és így azok száma, amelyek a 2, 3 és 5 számok egyikével sem oszthatók, $4000 - 2934 = 1066$.

2. *Horner-módszerrel helyettsítsük be* 5*-öt a* $p(x) = x^5 - 3x^2 + x + 3$ *polinomba!*

Megoldás:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 1 & 5 & 25 & 122 & 611 & 3058 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad p(5) = 3058$$

3. *Adjuk meg* 120201_3*-at tízes számrendszerben Horner módszerrel!*

Megoldás:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 5 & 15 & 47 & 141 & 424 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad 120201_3 = 424_{10}.$$

4. *a) Váltsuk át* 26*-ot* $10, 16, 8, 4, 2, 5, 26$ *alapú számrendszerbe!*
b) Váltsuk át 1001*-et* 2*-es,* 8*-as és* 16*-os számrendszerbe!*

Megoldás: a) Ismételt leosztásokkal, és a maradékok fordított sorrendben való felírásával:

$$\begin{array}{r|l} 26 & 10 \\ \hline 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 26 & 16 \\ \hline 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 26 & 8 \\ \hline 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 26 & 4 \\ \hline 6 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ \hline 13 & 0 \\ 6 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 26 & 5 \\ \hline 5 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 26 & 26 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

26 a megadott számrendszerekben:

$$26_{10} = 1A_{16} = 32_8 = 122_4 = 11010_2 = 101_5 = 10_{26}.$$

b) Mivel a b alapú számrendszerből b^m alapúba való átváltást a számjegyek csoportosításával (jobbról balra m tagú csoportokba) és a csoportok átváltásával, a b^m alapú számrendszerről b alapú számrendszerre való átváltást az egyes számjegyek átváltásával el lehet végezni, érdemes a 8-as számrendszerrel kezdeni, és abból átváltani.

1001	8
125	1
15	5
1	7
0	1

$1001 = 1751_8 = 1|111|101|001_2 = 11|1110|1001_2 = 3E9_{16}$.

5. *Határozzuk meg euklideszi algoritmussal* $(288, 204)$*-et, és állítsuk elő a legnagyobb közös osztót* $288x + 204y$ *alakban alkalmas* $x, y \in \mathbb{Z}$*-vel!*

Megoldás:

		288	204
	288	1	0
$-1\cdot$	204	0	1
$-2\cdot$	84	1	-1
$-2\cdot$	36	-2	3
$-3\cdot$	12	5	-7
	0		

Így $(288, 204) = 12 = 288 \cdot 5 + 204 \cdot (-7)$.

6. *Megoldhatók-e az alábbi diofantoszi egyenletek? Ha igen, adjuk meg az összes megoldásukat, illetve az összes nemnegatív megoldásukat!*

a) $288x + 204y = 182$

b) $288x + 204y = 3000$

Megoldás: a) Nem oldható meg, mert $(288, 204)$ nem osztója 182-nek (ránézésre is látszik, hogy 288 és 204, és így a legnagyobb közös osztójuk is osztható néggyel, 182 pedig nem).

b) Mivel $12 = (288, 204) \mid 3000$, a diofantoszi egyenlet megoldható, és egyik megoldását megkaphatjuk a 12 előző feladatbeli előállításának megfelelő többszöröseként: $(x_0, y_0) = (1250, -1750)$. De akár a 288 és a 12 előállításának az összegét is felhasználhatjuk, és abból kaphatunk egy kisebb megoldást: $(60, -70)$. Ebből az összes megoldás felírható: $(60 + \frac{204}{12}t,\ -70 - \frac{288}{12}t) = (60 + 17t,\ -70 - 24t)$, ahol $t \in \mathbb{Z}$ tetszőleges. Ez nemnegatív, ha $t \geq -\frac{60}{17} = -3\frac{9}{17}$, és $t \leq -\frac{70}{24} = -2\frac{22}{24}$, és ennek csak a $t = -3$ a $\mathbb{Z}$-beli megoldása. Vagyis ennek a diofantoszi egyenletnek a egyetlen nemnegatív megoldása $(9, 2)$.

(Mellesleg, ha nem lett volna előtte az 5. feladat, aminek az eredményét felhasználhattuk, akkor érdemesebb lett volna az egyenletet a könnyen felfedezhető 3 és 4 közös osztókkal egyszerűsíteni, és aztán megoldani.)

7. *Ha* $(a,b)=5$, *mi lehet* $(3a-b,a+b)$*? Adjunk is példát mindegyik esetre!*

Megoldás: $(3a-b,a+b)=((3a-b)+(a+b),a+b)=(4a,a+b)\mid(4a,4(a+b))=4(a,a+b)=4(a,b)=20$, másrészt $5=(a,b)\mid 3a-b$ és $\mid a+b$, tehát $5\mid(3a-b,a+b)$. Így $(3a-b,a+b)$ értéke csak 5, 10 vagy 20 lehet. Ezek valóban elő is fordulhatnak, például $a=0$ és $b=5$-re 5, $a=5$ és $b=5$-re 10, és $a=5$ és $b=15$-re 20 a $(3a-b,a+b)$ értéke.

8. *Bizonyítsuk be, hogy minden* $a>1$, $m,n\geq 1$ *egész számra* $(a^m-1,a^n-1)=a^{(m,n)}-1$.

Megoldás: Az állítást $m+n$-re vonatkozó teljes indukcióval látjuk be. $m+n=2$ esetén $m=n=1$, és $(a^1-1,a^1-1)=(a-1,a-1)=a-1=a^{(1,1)}-1$. Tegyük fel, hogy valamely $m,n\geq 1$ esetén a kisebb összegű párokra már beláttuk az állítást. Feltehetjük, hogy $m\geq n$. Ekkor $(a^m-1,a^n-1)=(a^m-1-a^{m-n}(a^n-1),a^n-1)=(a^{m-n}-1,a^n-1)$, és az utóbbi az indukciós feltevés szerint $=a^{(m-n,n)}-1=a^{(m,n)}-1$.