Gyakorló feladatok

1. *Legkevesebb hány tagja van az $f(x,y,z) = xy^3z - 2x^2y^3 + \dots$ szimmetrikus polinomnak? Írjuk fel ezt a minimális tagszámú polinomot úgy, hogy a tagjai lexikografikusan legyenek rendezve! Állítsuk elő elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként is!*

Megoldás: Az xy^3z tagból összesen háromfélét lehet kapni a változók permutációival (háromféleképpen választhatjuk ki, hogy melyik legyen harmadik hatványon, és a másik kettő elsőn lesz), a másikból viszont hatot (háromféle lehet a köbös változó, és emellé kétféle lehet a négyzetes). Tehát minimum kilenc tagja van.

$$f(x,y,z) = (x^3yz + y^3xz + z^3xy) - 2(x^3y^2 + x^3z^2 + y^3x^2 + y^3z^2 + z^3x^2 + z^3y^2)$$

Lexikografikusan rendezve:

$$f(x,y,z) = -2x^3y^2 + x^3yz - 2x^3z^2 - 2x^2y^3 - 2x^2z^3 + xy^3z + xyz^3 - 2y^3z^2 - 2y^2z^3$$

Az átalakításhoz érdemes a homogén részeket különválasztani, és azt kezdeni előbb átalakítani, amelyiknek lexikografikusan nagyobb a főtagja, mert abban az átalakítás során megjelenhet a kisebb főtagú, ha ugyanolyan a foka.
$x^3y^2 + x^3z^2 + y^3x^2 + y^3z^2 + z^3x^2 + z^3y^2 =$
$(xy+xz+yz)(xy+xz+yz)(x+y+z) - 2(x^3yz + y^3xz + z^3xy) - 5(x^2y^2z + x^2z^2y + y^2z^2x)$
Tehát
$f(x,y,z) = -2e_2^2e_1 + 5(x^3yz + y^3xz + z^3xy) + 10(x^2y^2z + x^2z^2y + y^2z^2x) =$
$-2e_2^2e_1 + 5(xyz(x+y+z)^2 - 2(x^2y^2z + x^2z^2y + y^2z^2x)) + 10(x^2y^2z + x^2z^2y + y^2z^2x) =$
$-2e_2^2e_1 + 5e_3e_1^2$.

2. *Legyenek $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ a komplex primitív ötödik egységgyökök. Írjuk fel azt az 1 főegyütthatós polinomot, amelynek gyökei az $\varepsilon_i\varepsilon_j$ számok $(1 \le i < j \le 4)$! Bontsuk fel ezt a polinomot $\mathbb{Q}[x]$-ben irreducibilisek szorzatára!*
Hogyan általánosíthatnánk ezt p-edik primitív egységgyökökre, ahol p tetszőleges prím?

Megoldás: 1. megoldás: a primitív ötödik egységgyökök azok az 1 abszolút értékű komplex számok, amelyeknek szögei a 2π-nek $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$-szöröse, tehát a szorzatok szöge a 2π-nek $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, 1, 1, $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$, $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$-szöröse, vagyis a két 1-en kívül minden primitív ötödik egységgyök egyszer szerepel köztük. Az ezekhez tartozó gyöktényezők szorzata $(x-1)^2\Phi_5(x) = (x-1)(x^5-1) = x^6 - x^5 - x + 1$. Mivel a körosztási polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, az $(x-1)^2\Phi_5(x)$ felírás egyúttal az irreducibilisekre bontás.
2. megoldás (az általános feladatra, tetszőleges $p > 2$ prím szerinti $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}$ primitív egységgyökökre): Az $f(x) = \prod\limits_{1 \le i < j \le p-1} (x - \varepsilon_i\varepsilon_j)$ 1 főegyütthatós polinom együtthatói az ε_i-knek polinomjai, és a polinom nem változik, ha a primitív egységgyököket megpermutáljuk, így az együtthatók az ε_i-knek szimmetrikus polinomjai, így az elemi szimmetrikus polinomokból, következésképpen a $\Phi_5(x)$ együtthatóiból polinomként kifejezhetők, ezért $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Az $\varepsilon_i\varepsilon_j$ szorzatok is p-edik egységgyökök, és az 1-et $\frac{p-1}{2}$-ször kapjuk meg: amikor az egységgyököt a saját inverzével, amely persze szintén primitív egységgyök, szorozzuk be. Tehát $f(x) = (x-1)^{(p-1)/2}h(x)$, ahol $h(x) \in \mathbb{Q}[x]$, és $h(x)$ minden gyöke primitív p-edik egységgyök. De akkor $h(x) \mid \Phi_p(x)^k$ valamely k-ra. Az egyértelmű irreducibilisekre bontás miatt, ekkor $h(x)$ irreducibilis tényezői is csak a $\Phi_p(x)$ példányai lehetnek, azaz $h(x) = \Phi_p(x)^m$ valamely m-re. A fokszámokból pedig azt kapjuk, hogy $(p-1)m + \frac{p-1}{2} = \binom{p-1}{2} = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$, azaz $m = \frac{p-3}{2}$, tehát $f(x) = (x-1)^{(p-1)/2}\Phi_p(x)^{(p-3)/2}$, irreducibilisek szorzataként felírva.
($p = 2$ esetén nincs $\varepsilon_i\varepsilon_j$ szorzat, ahol $i < j$, tehát csak páratlan prímekről szólhat az állítás általánosítása.)

3. *Az alábbi mátrixok közül melyek vannak lépcsős, illetve redukált lépcsős alakban? A redukált lépcsőseknél írjuk fel a mátrixhoz tartozó lineáris egyenletrendszer megoldását!*

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ *b)* $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ *c)* $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ *e)* $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Megoldás: a) Lépcsős, de nem redukált lépcsős, mert az első sor vezéreleme nem 1.

b) Redukált lépcsős alak. A megoldása

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad \text{vagy vektorosan} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

c) Nem lépcsős: a harmadik sor vezéreleme nincs jobbra a másodikénál.

d) Redukált lépcsős alak. Kötött változói x_1, x_3, szabad változói x_2, x_4. A szabad változóknak tetszőleges értékeket adhatunk: $x_2 = s$, $x_4 = t$ $(s, t \in \mathbb{R})$, és ebből a megoldás: $x_1 = 1 - 2t$, $x_2 = s$, $x_3 = 2 - 3t$, $x_4 = t$, vagy vektorosan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ s \\ 2-3t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

e) Lépcsős alak, de nem redukált, mert a második sor vezéregyese fölött van nem nulla elem.

4. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:*

a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ -x + y - z &= 2 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ 4x + 4y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 7x + 14y - 21z &= 7 \\ x + 2y - 3z &= 1 \\ 5x + 10y + 15z &= 5 \\ 3x + 6y - 9z &= 3 \end{aligned}$$

Ki tudunk-e választani az eredeti egyenletek közül kevesebbet, melyek ugyanezt a megoldást adják? Melyeket?

Megoldás: a)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right].$$

Bár ez még nem lépcsős alak, ebből is látszik, hogy a negyedik sor ellentmondásos, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása.

b)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 7 & 14 & -21 & 7 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 10 & 15 & 5 \\ 3 & 6 & -9 & 3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Itt y szabad változó, és a megoldás:

$$\begin{matrix} x = 1-2t \\ y = t \\ z = 0 \end{matrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Az első egyenletrendszernél már az első és a negyedik sor is ellentmond egymásnak, a másodikban a második és a harmadik egyenletből is ugyanezt a megoldást kapjuk (az első és a negyedik egyenlet a másodiknak 7-, illetve 3-szorosa).

5. *Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek:*
a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és egyértelmű a megoldása;
b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és nincs megoldása;
d) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van és pontosan 5 megoldása van (van-e ilyen valós, illetve véges test fölötti egyenletrendszer)?

Megoldás: a) Nincs, ha van megoldás, akkor van szabad változó is, ugyanis az öt sorban legfeljebb öt vezérelem lehet, nem jut minden oszlopba.
b) Igen, pl. lehet $x_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, és $x_1 + x_2 = 0$.
c) Igen, akár az egyik egyenlet önmagában is lehet ellentmondásos (csupa nulla együttható, és nem nulla konstans).
d) Valós egyenletrendszer nem lehet ilyen, mert ha egynél több megoldása van, akkor van szabad változója, és az végtelen sok értéket vehet föl. Viszont $\mathbb{Z}_5$ fölött lehet ilyen egyenletrendszer, például $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $x_4 - x_5 = 0$ megoldásai $(0, 0, 0, t, t)$, ahol $t \in \mathbb{Z}_5$ tetszőleges.

6. *Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő mátrixhoz tartozó valós egyenletrendszernek? Oldjuk meg a feladatot $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött is!*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -a & b \\ 1 & 3 & a & 0 \end{array}\right]$$

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -a & b \\ 1 & 3 & a & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a & b-1 \\ 0 & 2 & a & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a & b-1 \\ 0 & 0 & 3a & 1-2b \end{array}\right]$$

Ez lépcsős alak, és ha $a \neq 0$, akkor nincs ellentmondásos sor, és minden oszlopban van vezérelem, tehát 1 megoldás van;
ha $a = 0$ és $1 - 2b = 0$, azaz ha $a = 0$ és $b = \frac{1}{2}$, akkor nincs ellentmondásos sor, de van szabad változó, ezért végtelen sok megoldás van,
végül ha $a = 0$ és $b \neq \frac{1}{2}$, akkor nincs megoldás.
A sorredukció ugyanez $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött is, mert nem osztottunk sem 2-vel, sem 3-mal.
$\mathbb{Z}_2$ fölött a lépcsős alak harmadik konstansa $1-2b = 1$ nem nulla, így ha $a = 0$, akkor nincs megoldás, ha viszont $a \neq 0$, akkor nincs szabad változó, tehát egyetlen megoldás van.
$\mathbb{Z}_3$ fölött $3a = 0$, tehát ha $2b \neq 1$, azaz ha $b \neq -1$, akkor nincs megoldás, ha viszont $b = -1$, akkor van megoldás és egy szabad változó van, ami $\mathbb{Z}_3$ tetszőleges elemét veheti föl értékként $(0, 1,$ 2-t$)$, így ekkor három megoldás van.