Gyakorló feladatok

1. *Határozzuk meg az $x + 3y + z = 2$ és $x + 2y + 2z = 5$ egyenletű síkok metszetét! Ha a metszet egyenes, adjuk meg az egyenes explicit (paraméteres) egyenletét vektorosan és koordinátánként is!*

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

A megoldás az $x = 11 - 4t,\ \ y = -3 + t,\ \ z = t\ \ (t \in \mathbb{R})$ egyenes, vagy vektorosan

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Az utóbbiból leolvasható, hogy az egyenes átmegy a $(11, -3, 0)$ ponton, és párhuzamos a $(-4, 1, 1)$ vektorral.)

2. *Adjuk meg a $2x - y + z = 1$ sík explicit egyenletét, illetve egyenletrendszerét: oldjuk meg az egyenletet, mint egy egy egyenletből álló egyenletrendszert, és írjuk fel a megoldást vektorosan és koordinátánként is!*

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right],$$

redukált lépcsős alak. Két szabad változó van, legyen $y = s$ és $z = t$ tetszőleges, ekkor $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t$. Tehát a sík explicit egyenletrendszere, illetve explicit vektoros egyenlete:

$$\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t \\ y = s \\ z = t \end{array}, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Természetesen ez csak egy a sík lehetséges explicit egyenletei közül, a sík bármely pontját és bármely két a síkkal párhuzamos egymástól független vektort választhatnánk a vektoros egyenletben szereplő három vektornak, és így az egyenletrendszer is más lenne.)

3. *Legyen* $\mathbf{a} = (1, 0, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 2, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$. *Lássuk be, hogy* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *lineárisan függetlenek. A* $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 0)$ *és* $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 1)$ *vektorok közül azt amelyiket lehet, állítsuk elő az* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *lineáris kombinációjaként!*

Megoldás: A vektorok függetlenek, ha az $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$ egyenletnek csak egyetlen (az $x = y = z = 0$) megoldása van, azaz ha a vektorokból mint oszlopokból álló mátrix lépcsős alakjában minden oszlopban van vezérelem. Mivel a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok előállításánál is ugyanazt a mátrixot redukáljuk, egy redukcióval megoldhatjuk mindhárom feladatot.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Ebből látható, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ függetlenek, és a $\mathbf{v}$, illetve $\mathbf{w}$ előállításához tartozó konstans oszlopokkal a redukció után a következő kibővített mátrixokat kapnánk.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{és} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Tehát $\mathbf{v} = -\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$, viszont $\mathbf{w}$ nem állítható elő $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként.

4. *Oldjuk meg az alábbi két egyenletrendszert! Mit jelent a megoldásuk a sormodellben és az oszlopmodellben?*

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & - & 2y & - & z & = & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array}$$

Megoldás: Mivel a két egyenletrendszer együtthatómátrixa megegyezik, érdemes szimultán egyenletrendszerként megoldani.

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ebből leolvasható, hogy a második egyenletrendszernek nincs megoldása, az elsőnek a megoldása pedig

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1-t \\ 1-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a sormodell azt mondja, hogy az első három sík metszete egy egyenes, a második háromé pedig üres (bár semelyik két sík nem párhuzamos). Az oszlopmodell pedig azt, hogy $(1,2,-1)$ benne van az oszloptérben, azaz a $(2,1,1)$, $(-1,1,-2)$, $(1,2,-1)$ vekorok által kifeszített altérben, de $(1,2,0)$ nincs benne. A megoldás egyúttal azt is megadja, hogy milyen együtthatókkal kaphatjuk meg az $(1,2,-1)$-et a három vektor lineáris kombinációjaként (végtelen sok lehetőség van).

5. *Válasszunk ki az A mátrix oszlopai közül egy maximális független vektorhalmazt, és írjuk fel a többi vektort ezek lineáris kombinációjaként! Adjuk meg A sorterének és nullterének is egy-egy bázisát!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A vezérelemek az 1., 2. és 4. oszlopban vannak, így az A bázisoszlopai $(1,2,0,1)$, $(0,-1,1,-1)$ és $(0,1,1,1)$, és ezek bázisát alkotják az oszloptérnek. A redukált lépcsős alak megfelelő oszlopaiból leolvasható a többi oszlop előállítása is:

$$\begin{aligned} (1,0,2,-1) &= 1\cdot(1,2,0,1) + 2\cdot(0,-1,1,-1) \\ (2,3,3,\ \ 1) &= 2\cdot(1,2,0,1) + 2\cdot(0,-1,1,-1) + 1\cdot(0,1,1,1) \end{aligned}.$$

A sortérnek egy bázisát adják a lépcsős alak nemnulla sorai:

$$\{(1,0,1,0,2),(0,1,2,0,2),(0,0,0,1,1)\}\,.$$

A nulltér bázisát az $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásából olvashatjuk ki:

$$\begin{aligned} x_1 &= -s-2t\\ x_2 &= -2s-2t\\ x_3 &= s\\ x_4 &= -t\\ x_5 &= t \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x}=s\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\-2\\0\\-1\\1\end{bmatrix},$$

vagyis $\{(-1,-2,1,0,0),(-2,-2,0,-1,1)\}$ bázisa a nulltérnek.

6. *Az $\mathbb{R}^3$ alábbi részhalmazai közül melyik altér, illetve affin altér? Amelyik altér, annak adjuk meg egy bázisát, amelyik nem altér, de affin altér, azt adjuk meg $\mathbf{u}+V$ alakban, ahol V altér!*
a) $\{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}|=1\}$ *b)* $\{(x,y,z)\mid x+2y+z=0\}$ *c)* $\{(x,y,z)\mid x+2y+z=1\}$

Megoldás: a) Nem altér (pl. mert a $\mathbf{0}$ nincs benne), de nem is affin altér. Ugyanis, ha az $U=\{\,\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}|=1\,\}$ halmaz affin altér, akkor az $\mathbf{u}=(1,0,0)\in U$ elemre $V=U-\mathbf{u}$ altér volna. De $(0,0,1)-(1,0,0)=(-1,0,1)\in V$-re $2(-1,0,1)=(-2,0,2)\notin V$, ugyanis $(-2,0,2)+\mathbf{u}=(-1,0,2)\notin U$, mert $|(-1,0,2)|=\sqrt{5}$.

b) Altér, mert egy homogén lineáris egyenlet megoldástere. A megoldásokat vektorosan felírva: $(x,y,z)=s(-2,1,0)+t(-1,0,1)$ megkapjuk az altér bázisát: $\{(-2,1,0),(-1,0,1)\}$.

c) Nem altér, mert nem tartalmazza a $\mathbf{0}$-t, viszont affin altér mert egy lineáris egyenlet megoldáshalmaza. Ha V a b) részben definiált altér (a megfelelő homogén egyenlet megoldástere), akkor ez annak egy az inhomogén egyenlet megoldásával való eltoltja: $(1,0,0)+V$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy két altér metszete mindig altér, de két altér uniója csak akkor altér, ha az egyik altér tartalmazza a másikat!*

Megoldás: Legyen $W_1,W_2\le V$. Ekkor $\mathbf{0}\in W_1\cap W_2$, és ha $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W_1\cap W_2 \Rightarrow \mathbf{u},\mathbf{v}\in W_i$ $(i=1,2) \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v},\ \lambda\mathbf{u}\in W_i$ $(i=1,2,\ \lambda\in K) \Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v},\ \lambda\mathbf{u}\in W_1\cap W_2$ $(\lambda\in K)$. Így $W_1\cap W_2\le V$.

Viszont ha $W_1\not\subseteq W_2$ és $W_2\not\subseteq W_1$, akkor legyen $\mathbf{w}_1\in W_1\setminus W_2$ és $\mathbf{w}_2\in W_2\setminus W_1$. Így $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in W_1\cup W_2$, de $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\notin W_1$, mert ha $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2=\mathbf{w}_1'\in W_1$ lenne, akkor $\mathbf{w}_2=\mathbf{w}_1'-\mathbf{w}_1\in W_1$ ellentmondás, és ugyanígy $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\notin W_2$, tehát $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\notin W_1\cup W_2$. Ez azt mutatja, hogy $W_1\cup W_2$ nem altér, ha W_1 és W_2 egyike sem tartalmazza a másikat. Ha viszont az egyik tartalmazza a másikat, akkor az unió a kettő közül a nagyobbik altér, tehát altere V-nek.

8. *Mi lehet a redukált lépcsős alakja az $A=[\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3]\in\mathbb{R}^{4\times 3}$ mátrixnak, ha $\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2$, de $\mathbf{a}_1\notin\operatorname{span}(\mathbf{a}_3)$?*

Megoldás: $\mathbf{a}_i$ akkor bázisoszlop, ha nincs benne a tőle balra levő oszlopok által kifeszített altérben. $\mathbf{a}_1$ nem lehet nulla az $\mathbf{a}_1\notin\operatorname{span}(\mathbf{a}_3)$ feltétel miatt, ezért szükségképpen bázisoszlop.

Ha $\mathbf{a}_2\in\operatorname{span}(\mathbf{a}_1)$, akkor $\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2$ miatt $\mathbf{a}_3\in\operatorname{span}(\mathbf{a}_1)$, azaz $\mathbf{a}_3$ skalárszorosa $\mathbf{a}_1$-nek. Viszont $\mathbf{a}_1\notin\operatorname{span}(\mathbf{a}_3)$ miatt ez a skalár csak 0 lehet, vagyis $\mathbf{a}_3=\mathbf{0}$, és így $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ egyike sem bázisoszlop. A bázisoszlopokból való előállítás együtthatói megadják a nem bázisoszlopok elemeit a redukált lépcsős alakban, így a $\mathbf{0}=\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2$ feltételből adódó $\mathbf{a}_2=\frac{1}{2}\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_3=0$ összefüggések az alábbi L_1 redukált lépcsős alakot adják.

Ha viszont $\mathbf{a}_2\notin\operatorname{span}(\mathbf{a}_1)$, akkor $\mathbf{a}_2$ is bázisoszlop, és az $\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2$ összefüggésbeli

együtthatók megadják az L_2 redukált lépcsős alak hamadik oszlopának elemeit is.
Így a mátrix redukált lépcsős alakja

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{vagy} \qquad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$