Gyakorló feladatok

1. *Legyen* $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,2,-1),(1,1,0)\}$.

a) Lássuk be, hogy $\mathcal{B}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben!

b) Adjuk meg a $\mathbf{v} = (1,0,0)$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B}$ bázisra nézve!

c) Melyik az a $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ vektor, amelynek koordinátavektora a $\mathcal{B}$ bázisra nézve

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} ?$$

Megoldás: b) Ha B a $\mathcal{B}$ elemeiből mint oszlopvektorokból alkotott mátrix, akkor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ meghatározásához a $B\mathbf{x} = \mathbf{v}$ egyenletrendszert kell megoldanunk.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) A b) részben kiszámoltuk a B mátrix (redukált) lépcsős alakját is, amelyből látható, hogy $\mathcal{B}$ elemei függetlenek, és a 3-dimenziós $\mathbb{R}^3$ térben egy háromelemű független vektorhalmaz szükségképpen bázis.

c) $\mathbf{w} = 5\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3 = (5,0,5) + (0,2,-1) - (2,2,0) = (3,0,4)$.

2. *Mennyi a rangja annak a valós $n \times n$-es mátrixnak, amelynek az elemei sorfolytonosan leolvasva $1, 2, \ldots, n^2$?*

Megoldás: A mátrixot lépcsős alakra hozhatjuk a következő módon: vonjuk ki az első sort az összes többiből. Ekkor a 2. sortól kezdve a kapott mátrix sorai az $(1,1,\ldots,1)$ vektor n-szerese, $2n$-szerese, …, $(n-1)n$-szerese, és az utóbbiakból megfelelő sorosztásokkal csupa $(1,1,\ldots,1)$-et kapunk. Az első és a második sor cseréje után az elsővel nullázva a kapott mátrix lépcsős lesz két nemnulla sorral. Tehát a megadott mátrix rangja 2.

3. *Mennyi lehet annak az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésnek a rangja, amelyre $0 \neq \operatorname{Im} f \leq \operatorname{Ker} f$? Adjunk példát ilyen $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mátrixleképezésre!*

Megoldás: A dimenziótétel szerint $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, másrészt a megadott tartalmazási feltételek miatt $0 < \dim \operatorname{Im} f < \dim \operatorname{Ker} f$, így $\operatorname{Im} f$ csak 1 dimenziós lehet, $\operatorname{Ker} f$ pedig 2. Az első feltétel az A mátrixra azt jelenti, hogy az oszlopok mind egy vektornak a skalárszorosai. Legyen ez az $\mathbf{e}_1$ vektor, azaz tegyük fel, hogy $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1)$. Ekkor

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } A \neq 0.$$

Emellett már csak arra van szükség, hogy $\mathbf{e}_1 \in \operatorname{Ker} f$ legyen, azaz $1a + 0b + 0c = a = 0$. Például az $a = b = 0$, $c = 1$ értékek megfelelnek.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. *Tekintsük a következő mátrixokat:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki a BC, CB, $5A$, $A + D$, AD, DA, $D^T D + A$ mátrixkifejezések közül azokat, amelyek értelmezve vannak!

Megoldás: $A + D$ és AD nincs értelmezve. A többi:

$$BC = [7],\ CB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ 5A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 10 \end{bmatrix},\ DA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ D^T D + A = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

5. *Keressünk olyan 2×2-es és 3×3-as C valós mátrixokat, melyekre: $C^2 = 0$, de $C \neq 0$.*

Megoldás: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, illetve $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ilyenek.

6. *Mi történik egy $n \times n$-es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi mátrixokkal megszorozzuk?*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A-val balról: az első sor szorzódik 3-mal,
A-val jobbról: az első oszlop szorzódik 3-mal,
B-vel balról: a második sor kétszerese hozzáadódik az első sorhoz,
B-vel jobbról: az első oszlop kétszerese hozzáadódik a második oszlophoz,
C-vel balról: az első és a második sor helyet cserél,
C-vel jobbról: az első és a második oszlop helyet cserél.