Gyakorló feladatok

1. *Igazak-e minden $n \times n$-es A, B mátrixra az alábbi egyenlőségek?*

a) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ *b)* $(A+I)(A-I) = A^2 - I^2$
c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ *d)* $(AB)^T = A^T B^T$

Megoldás: a), c): Nem igazak, csak amikor $AB = BA$.
b): Igaz. d) $(AB)^T = B^T A^T$, tehát általában a d) állítás sem igaz, csak amikor $AB = BA$.

2. *Írjuk fel az alábbi A mátrix bázisfelbontását, majd ezt felhasználva bontsuk fel a mátrixot $r(A)$ darab 1 rangú mátrix összegére!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Hozzuk az A mátrixot redukált lépcsős alakra!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ennek alapján az $A = BR$ bázisfelbontásban B oszlopai az A bázisoszlopai, R sorai pedig a redukált lépcsős alak nemnulla sorai. Ezután a diádokra bontás tagjait a B oszlopainak az R ugyanannyiadik soraival való szorzatai adják.

$$A = BR = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 0 \quad 1] + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [0 \quad 1 \quad 2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. *Lineárisak-e a következő leképezések? Ha igen, mi a standard mátrixuk?*

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+1,\ 2,\ 3)$
b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+y,\ -y,\ 2x)$
c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|$
d) *az* $\mathbb{R}^3$ 90°*-os forgatása a z tengely körül*
e) *az $x+y-2z=0$ síkra való tükrözés*
f) $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *ahol f az $y=x$ egyenesre, g pedig az x tengelyre való tükrözés*

Megoldás: a) Nem lineáris, például mert $f(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$
b) Lineáris:

$$\begin{aligned} f((x,y)+(x',y')) =& f(x+x',\ y+y') = \\ =& (x+x'+y+y',\ -y-y',\ 2x+2x') = \\ =& (x+y,\ -y,\ 2x) + (x'+y',\ -y',\ 2x') = \\ =& f(x,y) + f(x',y'),\ \text{és} \\ f(\lambda(x,y)) =& f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y,\ -\lambda y,\ 2\lambda x) = \\ =& \lambda((x+y,\ -y,\ 2x) = \lambda f(x,y). \end{aligned}$$

Az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ báziselemek képei lesznek a standard mátrix oszlopai: $f(1,0) = (1,0,2)$ és $f(0,1) = (1,-1,0) \Rightarrow$

$$\text{Az } f \text{ standard mátrixa} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vagy közvetlenül a függvény megadásából is leolvashatjuk a standard mátrixot:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ -y \\ 2x \end{bmatrix} \quad \text{teljesül az} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mátrixra.}$$

És ez egyúttal a linearitást is bizonyítja (a korábbi számolás helyett), mivel egy $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mátrixleképezés szükségképpen lineáris.

c) Nem lineáris, mert például $f(\mathbf{e}_1) = 1$, de $f(-\mathbf{e}_1) = 1 \neq -f(\mathbf{e}_1)$.

d) Lineáris e)-vel és f)-fel együtt, mert mindegyik az origót helyben hagyó egybevágóság. Az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisvektorok képe rendre $\mathbf{e}_2$, $-\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_3$, ezért a standard mátrix

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Itt a standard bázisvektorok képének kiszámolása helyett, vagy egy általános (x,y,z) pont képének meghatározása helyett, egyszerűbb egy olyan bázis elemeinek a képét megadni, amelyre a báziselemek vagy a síkból valók (mert azok önmagukba mennek), vagy merőlegesek rá. Legyen $\mathbf{b}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{b}_2 = (2,0,1)$, $\mathbf{b}_3 = (1,1,2)$. Ekkor az A standard mátrixra

$$A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

De mátrixinvertálás helyett transzponálás után szimultán egyenletrendszerként is megoldhatjuk az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenletet az ismeretlen A^T mátrix oszlopaira:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

f) Könnyen látható, hogy $\mathbf{e}_1 \overset{f}{\mapsto} \mathbf{e}_2 \overset{g}{\mapsto} -\mathbf{e}_2$, és $\mathbf{e}_2 \overset{f}{\mapsto} \mathbf{e}_1 \overset{g}{\mapsto} \mathbf{e}_1$, így a transzformáció standard mátrixa $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
De megkaphatjuk ezt a két transzformáció standard mátrixának kompozíciójaként is: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
Vagy felhasználhatjuk azt a geometriai tényt, hogy a sík két egymást metsző tengelyű tükrözésének kompozíciója a metszéspontjuk körüli kétszeres szögű forgatás, és felírhatjuk a $g \circ f$ mátrixát a $-90°$ szögű forgatás mátrixaként is.

4. *a) Az előírhatósági tételt használva adjunk meg olyan $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ lineáris transzformációt, amelyre $0 \neq \operatorname{Im} f \leq \operatorname{Ker} f$.*
b) Lássuk be, hogy bármilyen $U \leq V \leq K^3$ 1- és 2-dimenziós alterekre van olyan f lineáris transzformáció, amelyre $\operatorname{Im} f = U$ és $\operatorname{Ker} f = V$. Hány ilyen transzformáció van $K = \mathbb{Z}_3$ esetén?

Megoldás: a) Ahogy a 10/3. feladat megoldásában láttuk, a dimenziótétel miatt ilyen feltételek mellett $\operatorname{Im} f$ csak egydimenziós lehet, $\operatorname{Ker} f$ pedig kétdimenziós. Elérhetjük, hogy $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1)$, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ legyen: ehhez az kell, hogy $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}$, és $\mathbf{0} \neq f(\mathbf{e}_3) \in \operatorname{span}(\mathbf{e}_1)$ legyen, pl. $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$. Az ehhez tartozó mátrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Legyen $\{ \mathbf{b}_1 \}$ az U, és ezt kiegészítve $\{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \}$ a V egy bázisa. Egészítsük ki az utóbbit a K^3 egy bázisává: $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \}$. Ahhoz, hogy $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \operatorname{Ker} f$ legyen, az kell, hogy $f(\mathbf{b}_1) = f(\mathbf{b}_2) = \mathbf{0}$ legyen. Az $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}(\mathbf{b}_1)$ feltétel akkor teljesül, ha emellett $f(\mathbf{b}_3) \in \operatorname{span}(\mathbf{b}_1) \setminus \{ \mathbf{0} \}$. A dimenziótétel miatt erre az f-re $\operatorname{Ker} f$ pontosan $\operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ lesz.
$K = \mathbb{Z}_3$ esetén $f(\mathbf{b}_3)$-ra csak két választás van, így csak két ilyen tulajdonságú f létezik az adott U-hoz és V-hez.

5. *Az $\mathbb{R}^3$ tér $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$ irányvektorú, origón átmenő egyenese körüli $90°$-os forgatásához keressünk három olyan független vektort, amelyeknek a képét könnyű meghatározni, és ennek segítségével írjuk fel a transzformáció standard mátrixát!*

Megoldás: A $\mathbf{b}_1 = (1, 2, 2)$ vektort a forgatás önmagába viszi, emellé érdemes két olyan vektort választani, amelyek az egyenesre és egymásra is merőlegesek. Az egyik legyen $\mathbf{b}_2 = (2, -2, 1)$, és $\mathbf{b}_3$ a $\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$ vektoriális szorzattal egyirányú, $\mathbf{b}_2$-vel azonos hosszúságú vektor: $\frac{3}{9}(6, 3, -6) = (2, 1, -2)$ (érdemes volt a második vektort is az elsővel azonos hosszúságúra választani, így a harmadik vektor is szép lett). Ekkor az f transzformáció standard mátrixára, A-ra

$$A[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3] = [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_3 (-\mathbf{b}_2)].$$

A 3.f) feladathoz hasonlóan, szimultán egyenletrendszer megoldásával meghatározhatjuk az A^T, és így az A mátrixot is.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -3 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & -2 & -5 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -9/2 & -4 & -1/2 & -2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ 0 & 1 & 0 & -4/9 & 4/9 & 7/9 \\ 0 & 0 & 1 & 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ -4/9 & 4/9 & 7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1/9 & -4/9 & 8/9 \\ 8/9 & 4/9 & 1/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 \end{bmatrix}$$

6. *Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét, ha van!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$[A \mid I\,] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] = [I \mid A^{-1}],$$

tehát $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

B nem invertálható, mert nem teljes rangú (az első és a második sor összefügg).

$$[C \mid 0\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] = [I \mid C^{-1}] \quad \Rightarrow$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D \mid I\,] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right] = [I \mid D^{-1}] \Rightarrow$$

$$D^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. *Oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket, ha lehet! A, B, C, D az előző feladatban szereplő mátrixok.*

a) $CX = D$ *b)* $BX = C$ *c)* $XB = M$, *ahol* $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *d)* $XB = AM$

Megoldás: a) Kihasználhatjuk, hogy az előző feladatban kiszámoltuk C inverzét, és abból

$$X = C^{-1}D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

De anélkül is megoldhatjuk szimultán egyenletrendszerként:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right],$$

tehát $X = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

b) Mivel B nem invertálható, itt a szimultán egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right]$$

és már itt a második sorból látszik, hogy nincs megoldás. (Mellesleg, ezt abból is tudhatjuk, hogy $r(B) = 2$, így $r(BX) \leq 2$, míg $r(C) = 3$, ugyanis C invertálható.)

c) Az eredeti helyett a transzponáltját tudjuk szimultán egyenletrendszerként megoldani: $B^T X^T = M^T$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Így X^T első oszlopa $\begin{bmatrix} 4-2t \\ t \\ -1 \end{bmatrix}$, a második $\begin{bmatrix} -1-2s \\ s \\ 2 \end{bmatrix}$, ahol t, s tetszőlegesek. Tehát

$$X = \begin{bmatrix} 4-2t & t & -1 \\ -1-2s & s & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Mivel A invertálható, $XB = AM$ akkor és csak akkor, ha $A^{-1}XB = M$, tehát a c)-beli mátrixegyenlet megoldásait A-val balról megszorozva megkapjuk ennek az egyenletnek a megoldásait:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$