Gyakorló feladatok

1. *Tekintsük a $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(2,1,3),(1,2,4)\}$ bázist $\mathbb{R}^3$-ben. Mi a $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ és a $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ áttérési mátrix? Adjuk meg a $\mathbf{v} = (1,1,2)$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B}$ bázisra nézve!*

Megoldás:

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

és $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = T^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & | & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. *Ha az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

akkor mi a mátrixa a $\mathcal{C} = \{\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\}$, illetve a $\mathcal{D} = \{\mathbf{b}_1, 2\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban?

Megoldás:

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_3 \mapsto 3\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 + 9\mathbf{b}_3 = 3\mathbf{c}_3 + 6\mathbf{c}_2 + 9\mathbf{c}_1 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{c}_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2 \mapsto 2\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_2 + 8\mathbf{b}_3 = 2\mathbf{c}_3 + 5\mathbf{c}_2 + 8\mathbf{c}_1 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{c}_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_1 \mapsto 1\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 + 7\mathbf{b}_3 = 1\mathbf{c}_3 + 4\mathbf{c}_2 + 7\mathbf{c}_1 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{c}_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{b}_1 \mapsto 1\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 + 7\mathbf{b}_3 = 1\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2 + 7\mathbf{d}_3 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{d}_1)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_2 = 2\mathbf{b}_1 \mapsto 4\mathbf{b}_1 + 10\mathbf{b}_2 + 16\mathbf{b}_3 = 4\mathbf{d}_1 + 5\mathbf{d}_2 + 16\mathbf{d}_3 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{d}_2)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_3 = \mathbf{b}_3 \mapsto 3\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 + 9\mathbf{b}_3 = 3\mathbf{d}_1 + 3\mathbf{d}_2 + 9\mathbf{d}_3 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{d}_3)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [f]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 7 & 16 & 9 \end{bmatrix}$$

3. *Írjuk fel az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban!*

a) Az $y = x$ egyenesre való tükrözés az $\mathbb{R}^2$ standard $\mathcal{E}$, továbbá a $\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,1)\}$, illetve $\mathcal{C} = \{(1,1), (-2,0)\}$ bázisában;

b) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, a $\mathcal{B} = \{(1,2), (1,1)\}$ bázisban;

c) az origón átmenő $(1,2,-3)$ irányú egyenesre való merőleges vetítés tetszőleges, kényelmes bázisban (adjuk meg a választott bázist is).

Megoldás: a) Mivel $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1$, a standard mátrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$P = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}} = Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[f]_{\mathcal{C}} = Q^{-1}AQ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$P = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[f_A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

c) Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, ahol $\mathbf{b}_1 = (1,2,-3)$ az egyenes irányvektora, és $\mathbf{b}_2 = (2,-1,0)$, $\mathbf{b}_3 = (3,0,1)$ két független vektor, ami merőleges az egyenesre.. Ekkor $\mathbf{b}_1$ önmagába, $\mathbf{b}_2$ és $\mathbf{b}_3$ $\mathbf{0}$-ba képződik, így

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. *Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát elemi sorműveletek segítségével!*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 13 \end{vmatrix} = -1 \cdot 13 = -13$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 8 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 8 & -24 \\ 0 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 8\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

A negyedik mátrixnál $[n/2]$ sorcserét kell végezni (az első sort az utolsóval, a másodikat az utolsó előttivel, és így tovább), hogy az identitás mátrixot kapjuk, így a determinánsa $(-1)^{[n/2]}$.

5. *Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?*

Megoldás: $|2A^{-1}| = 2^5|A^{-1}| = 32 \cdot \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{32}{3}$

$|(2A)^{-1}| = \dfrac{1}{|2A|} = \dfrac{1}{96}$

$|A^2 A^T A^{-1}| = |A|^2|A|\dfrac{1}{|A|} = 9.$

6. *Számítsuk ki a következő $n \times n$-es determináns értékét! (Ötlet: a második sort vonjuk ki az összes többiből.)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (n-2)!$$

7. *Számítsuk ki a*

$$\begin{bmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix}$$

determináns értékét! Hogyan lehet ezt általánosítani $n \times n$-es mátrixra? Mennyi a mátrix rangja az a, b, n értékektől függően?

Megoldás: Tekintsük rögtön az $n \times n$-es mátrixot, amelynek főátlójában végig b, mindenhol máshol a van. A determináns kiszámolásánál adjuk az összes sort az elsőhöz, ebből emeljünk ki $(b + (n-1)a)$-t, majd ennek az a-szorosát vonjuk ki a többi sorból! Így háromszögmátrixot kapunk.

$$\begin{vmatrix} b & a & a & \dots & a \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+(n-1)a & \dots & \dots & \dots & b+(n-1)a \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & b \end{vmatrix} =$$

$$(b+(n-1)a)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ a & b & a & \dots & a\\ a & a & b & \dots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & a & \dots & b\end{vmatrix} = (b+(n-1)a)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & b-a & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & b-a & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b-a\end{vmatrix} =$$

$$= (b+(n-1)a)(b-a)^{n-1}.$$

Ha $b \neq a$ és $b \neq -(n-1)a$, akkor a mátrix determinánsa nem 0, így a rangja n. Ha $b = a$, akkor látható, hogy a mátrix rangja 0 vagy 1 aszerint, hogy a nulla vagy nem nulla. Az $n = 1$ esetben 0 vagy 1 a rang, aszerint, hogy b nulla vagy nem nulla.
Marad az az eset, amikor $b = -(n-1)a \neq 0$, és $n \geq 2$. Ekkor a determináns 0, tehát a rang kisebb n-nél, viszont az eggyel kisebb méretű, ugyanilyen mátrix (az eredeti mátrix bal fölső sarokmátrixa) rangja a korábbiak szerint $n-1$. Ebből következik, hogy a nagy mátrix első $n-1$ sorának nincs olyan nemtriviális lineáris kombinációja, amelyik az első $n-1$ helyen 0 lenne, tehát olyan sem, ami a mind az n helyen nullát adna. Vagyis a nagy mátrix első $n-1$ sora független, így a rang legalább $n-1$, azaz a korábbi észrevétel miatt pontosan $n-1$.