Gyakorló feladatok

1. *Sorműveletek nélkül, csak inverziószámolással határozzuk meg az alábbi kígyók determinánsát!*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az A mátrixhoz a $4,3,2,1$ permutáció tarozik, amelynek az inverziószáma $\binom{4}{2} = 6$, így $|A| = (-1)^6 \cdot 1^4 = 1$.
A B-hez az $1,3,4,2$ permutáció tartozik, inverziószáma 2, így $|B| = (-1)^2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 4 = -24$.
A C-hez tartozó permutáció $2,1,3$, inverziószáma 1, és $|C| = (-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = -30$.

2. *Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát és inverzét aldeterminánsok segítségével:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az utolsó sor szerint kifejtve: $|A| = (-1) \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 3) - 1 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = 6 - 1 = 5$.

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -6 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat minél egyszerűbben!*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c+d & c^2+d^2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n \times n}$$

Megoldás: a) Az első sort a másodikból kivonjuk, és a második szerint kifejtjük a determinánst.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

b) A harmadik sort kivonjuk a másodikból, és a második sor szerint, majd a kapott 3×3-as determinánst a harmadik sor szerint kifejtjük.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \cdot 3 = -12$$

c) A determináns multilinearitását használjuk a harmadik sorra, hogy a feladatot visszavezessük Vandermonde-determinánsok kiértékelésére.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c+d & c^2+d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & d & d^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) + (b-a)(d-a)(d-b) - ab(b-a).$$

d) Nevezzük el az $n \times n$-es mátrixot A_n-nek, a determinánsát d_n-nek. Az első sor szerint kifejtve azt kapjuk, hogy $d_n = |A_n| = 2|A_{n-1}| - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{0} & A_{n-2} \end{bmatrix}$, és a második determinánst az első oszlopa szerint kifejtve ez tovább $2d_{n-1} - |A_{n-2}| = 2d_{n-1} - d_{n-2}$. A $d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2}$ egyenletet átrendezve a $d_n - d_{n-1} = d_{n-1} - d_{n-2}$ összefüggéshez jutunk, így az $s_n := d_n - d_{n-1}$ sorozatra $s_n = s_{n-1} = \ldots = s_2 = d_2 - d_1 = 3 - 2 = 1$, tehát $d_n = 1 + d_{n-1} = 2 + d_{n-2} = \ldots = (n-1) + d_1 = n + 1$.

4. *Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját! Keressünk benne a rangnak megfelelő méretű nemnulla aldeterminánst!*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lépcsős, így a mátrix rangja 3. Az A utolsó három oszlopából alkotott mátrix determinánsa nem nulla: az utolsó oszlop szerint kifejtve, $-1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = -5$.

5. *Cramer szabály alkalmazásával oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ahol*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textit{és} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$x_1 = \frac{|A_{1,\mathbf{b}}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{4}{5}, \qquad x_2 = \frac{|A_{2,\mathbf{b}}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{1}{5},$$

$$x_3 = \frac{|A_{3,\mathbf{b}}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{2}{5}$$

6. *Határozzuk meg az A mátrix LU-felbontását! Számítsuk ki ebből az A determinánsát és az $A\mathbf{x} = [1 \ \ -1 \ 0]^T$ egyenletrendszer megoldását!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A felső háromszög alakra hozásnál csak $s_i \mapsto s_i - cs_j$ alakú műveleteket használjunk, ahol $i > j$, és először az első sor többszöröseit vonjuk ki, majd a második sorét, és így tovább. Ha a végrehajtott sorműveletekhez tartozó elemi mátrixok rendre $E_1, \ldots, E_k$, akkor $E_k \cdots E_1 A = U$ felső háromszögmátrix, és ebből $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} U$, ahol $L := E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ alsó háromszögmátrix, csupa 1-gyel a főátlóban. L-et megkaphatjuk úgy, hogy az I egységmátrixra végrehajtjuk az A-n végzett sorműveletek inverzét fordított sorrendben: $L = E_1^{-1}(E_2^{-1} \cdots (E_k^{-1} I) \cdots)$. Így $l_{ij} = c_{ij}$ pontosan akkor, ha szerepelt $s_i \mapsto s_i - c_{ij} s_j$ alakú sorművelet, az átló alatti többi elem és minden átló fölötti 0, az átlóbeliek pedig 1-ek.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = U \quad \text{és} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, azaz $L(U\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásához először az $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, majd az $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert oldjuk meg.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(felülről lefelé behelyettesítésekkel megoldva), és

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

(alulról felfelé behelyettesítésekkel megoldva).

7. *Adjuk meg az*

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 6 \end{array}$$

valós egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen megoldását, és ennek felhasználásával írjuk fel az összes megoldást!

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ebből leolvasható a homogén egyenletrendszer megoldása is, azaz az együtthatómátrix nulltere:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{rcr} x & = & -2t \\ y & = & -t \\ z & = & t \end{array} \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a nulltér bázisa $\{(-2,-1,1)\}$, és a sortér ennek a merőlegese, ezért az eredeti egyenletrendszert (illetve annak a redukáltját) ki kell egészíteni a $(-2,-1,1)(x,y,z)^T = 0$ egyenlettel.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A sortérbe eső megoldás: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, és az összes megoldás: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8. *Határozzuk meg az $x - y = 1$, $x - y = 2$ ellentmondásos lineáris egyenletrendszer optimális közelítő megoldásait normálegyenlet segítségével! Határozzuk meg az egyetlen sortérbe eső (minimális abszolútértékű) optimális közelítő megoldást!*

Megoldás: $[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow$

$$[A^TA|A^T\mathbf{b}] = A^T[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{rr|r} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az utóbbinak a megoldása $\begin{bmatrix} (3/2)+t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. A minimális abszolút értékű közelítő megoldást az $(1,1)$ által generált nulltérre való merőlegesség feltételének hozzáadásával kapjuk:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 3/2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 3/2 \\ 0 & 2 & -3/2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & -3/4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}.$$

9. *Határozzuk meg a következő mátrixok pszeudoinverzét!*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Ha egy B mátrix teljes oszloprangú, akkor $B^+ = (B^TB)^{-1}B^T$, ha C teljes sorrangú, akkor $C^+ = C^T(CC^T)^{-1}$. Ha az A mátrixra egyik feltétel sem teljesül, akkor az A bázisfelbontása olyan $A = BC$ szorzatot ad, amelyre B teljes oszloprangú és C teljes sorrangú, és ekkor $A^+ = C^+B^+$.

a) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ teljes sorrangú, így $C^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}=\tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\\-1&2\end{bmatrix}.$$

b) $C=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ teljes oszloprangú, így $C^+=\left(\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}=\tfrac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}$.

c) $A=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ A=BC=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\Rightarrow$

$$C^+=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad B^+=\left(\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\ \Rightarrow$$

$$A^+=C^+B^+=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}.$$

d) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&1&3\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&1&2\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow A=BC=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}\Rightarrow$

$$C^+=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{bmatrix}\tfrac{1}{6}\begin{bmatrix}5&-2\\-2&2\end{bmatrix}=\tfrac{1}{6}\begin{bmatrix}5&-2\\-2&2\\1&2\end{bmatrix},$$

$$B^+=\left(\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\end{bmatrix}\ \Rightarrow$$

$$A^+=C^+B^+=\tfrac{1}{18}\begin{bmatrix}12&-9&3\\-6&6&0\\0&3&3\end{bmatrix}=\tfrac{1}{6}\begin{bmatrix}4&-3&1\\-2&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

Mellesleg itt a B mátrix az a)-beli mátrix transzponáltja, így B^+ az ott kiszámolt pszeudoinverznek a transzponáltjaként is megkapható.

10. *Mutassuk meg, hogy általában nem igaz, hogy $(AB)^+$ egyenlő lenne B^+A^+-szal. Tekintsük az $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ és $B=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$ mátrixokat!*

Megoldás: Legyen $C=AB$. A három mátrix bázisfelbontása

$$A=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\ \text{és}\ C=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix},\ \text{amiből}$$

$$A^+=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^+=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$B^+=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^+=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},$$

$$C^+=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^+=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ \text{de}\ B^+A^+=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}.$$

11. *Oldjuk meg a 8. feladatot az együtthatómátrix pszeudoinverzével való beszorzással is!*

Megoldás: $A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\end{bmatrix}\Rightarrow$

$$A^+=\begin{bmatrix}1&-1\end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^+=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}=\tfrac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

A (minimális abszolút értékű) legjobb közelítő megoldás:

$$A^+\mathbf{b}=\tfrac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/4\\-3/4\end{bmatrix}.$$