Gyakorló feladatok

1. a) Bizonyítsuk be, hogy egy rendezett halmaz akkor és csak akkor jólrendezett, ha nincs benne végtelen, szigorúan leszálló lánc!

b) Mutassuk meg, hogy jólrendezett halmaz minden részhalmaza jólrendezett!

c) Bizonyítsuk be, hogy ha egy rendezett halmaz véges sok jólrendezett részhalmazának az uniója, akkor maga is jólrendezett!

d) Tegyük fel, hogy az A rendezett halmaz az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ jólrendezett halmazok uniója, és ha $x \in A_i$, $y \in A_j$, $i < j$, akkor $x < y$. Lássuk be, hogy ekkor A jólrendezett! Adjunk meg $\mathbb{R}$-ben ilyen rendezésű részhalmazt!

e) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}$ nem jólrendezett a szokásos rendezésével, és adjunk meg rajta egy másik rendezést, ami jólrendezés!

2. Igazoljuk, hogy

a) $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$

b) $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

3. Határozzuk meg az első n Fibonacci-szám összegét!

4. Hány olyan n-hosszú sorozat képezhető az 1, 2, 3, 4 számokból, melyek 1-gyel kezdődnek, és minden szám pontosan 1-gyel különbözik az előzőtől? (Útmutatás: Lássuk be, hogy erre is érvényes a Fibonacci-rekurzió!)

5. Legyen $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$, $g_0 = a$, $g_1 = b$ (általánosított Fibonacci-sorozat). Igazoljuk, hogy $g_n = af_{n-1} + bf_n$.

6. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

7. Írjuk fel a $\sqrt{3}$ számot lánctört alakban! Számítsuk ki az ebből kapott első négy közelítő racionális számot és a közelítés hibáját. ($\sqrt{3} \approx 1,732$.) Ellenőrizzük, hogy jól közelítenek-e ezek a számok az irracionális számok approximációs tétele értelmében (azaz teljesül-e, hogy $|\sqrt{3} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$)?

Házi feladatok

Beadási határidő: szeptember 12.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Mely halmazok jólrendezett halmazok az alábbiak közül? Az indoklásban használhatjuk a gyakorló feladatsor állításait.
 a) páros számok,
 b) pozitív páros számok,
 c) a $[0,1]$ intervallumba eső számok,
 d) egész számok négyzetei,
 e) egész számok köbei.

2. Igazoljuk, vagy adjunk ellenpéldát!
 a) két racionális szám összege racionális,
 b) egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális,
 c) két irracionális szám összege irracionális.

3. Mennyi az értéke a következő kifejezéseknek?
 a) $\lceil \lfloor \frac{3}{4} \rfloor + \lfloor -\frac{3}{4} \rfloor \rceil$,
 b) $\lfloor \lceil \frac{3}{4} \rceil + \lceil -\frac{3}{4} \rceil \rfloor$,
 c) $\{\frac{7}{4}\} + \{-\frac{7}{4}\} + \{-1\}$,
 d) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ $(x \in \mathbb{R})$

4. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy az n-edik Fibonacci-szám

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

5. Legyen a_n azon n-hosszú 0-1-sorozatok száma, amelyben nincs két 0 egymás mellett. Keressünk rekurziót az a_n-re. Mi a kapcsolata az a_n sorozatnak a Fibonacci-sorozattal?

6. Keressük meg azt a legkisebb $q \geq 5$ természetes számot, amelyhez van olyan $p \in \mathbb{Z}$, hogy

$$\left| \sqrt{3} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

(A számoláshoz használhatjuk a $\sqrt{3} \approx 1,732$ becslést. Vigyázat! Nem minden jó közelítés származik a lánctört alakból!)

7*. Bontsuk fel
 a) a nemnegatív racionális számok halmazát
 b) a racionális számok halmazát
jólrendezett végtelen halmazok diszjunkt uniójára!