

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{8}$$

$$x \equiv -4 \pmod{11}$$

2. Határozzuk meg az alábbi értékeket:

a) $\varphi(23)$, $\varphi(21)$, $\varphi(63)$, $\varphi(10!)$,

b) $120^{24} \pmod{23}$, $115^{21} \pmod{21}$, $68^{111} \pmod{63}$, $111^{68} \pmod{63}$. Vigyázzunk, 111 nem relatív prím a 63-hoz!

c) $3^{3^{3^4}}$ utolsó két számjegye.

3. Készítsük el a \mathbb{Z}_5 és \mathbb{Z}_6 gyűrűk összeadás- és szorzástábláját!

Készítsük el a mod6 redukált maradékosztályok csoportjának, \mathbb{Z}_6^* -nak a szorzástábláját!

4. Bizonyítsuk be, hogy a $P(H)$ hatványhalmaz a szimmetrikus differencia $((A \cup B) \setminus (A \cap B))$ és metszet műveletekkel kommutatív, egységelemes gyűrűt alkot!

5. Adjuk meg az alábbi komplex számok algebrai alakját:

a) $(3 - 4i)(7 + 8i)$

b) $(3 - 4i)/(2 - i)$

c) i^{199}

d) $(1 + i)^9$

6. Legyen $z = 1 + 3i$ és $u = 2 - i$. Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:

a) $z\bar{z}$

b) u/\bar{u}

c) $|z - u|$

d) $|2z - zu|$

e) $|u/z\bar{u}^3|$.

7. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a

$$z^2 + 2iz - 1 + i = 0$$

egyenletet!

8. Mi a mértani helye a síkon azon pontoknak, amelyeknek megfelelő z komplex számokra:

a) $|z - 5 + i| = 2$

b) $|z - i| = |z + i|$

c) $|(z - 3 + 4i)/(z - i)| \geq 1$

d) $|z| = 3iz$

e) $|z| = iz$

f) $z + \bar{z} < 4$.

Házi feladatok

Beadási határidő: október 3.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$x \equiv 1 \pmod{13}$$

$$x \equiv 1 \pmod{4}$$

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

2. Egyszerűsítsük a $356^{365} \pmod{175}$ hatványt az Euler–Fermat-tétel segítségével (indokoljuk is, miért használható erre az E–F.-tétel), majd számoljuk ki az értékét!
3. Készítsük el a modulo 12, illetve modulo 8 redukált maradékosztályok csoportjának, \mathbb{Z}_{12}^* -nak és \mathbb{Z}_8^* -nak a szorzástábláját!
4. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a

$$z^2 + 4iz - 3 = 0$$

egyenletet!

5. Határozzuk meg a $(3 + i)^{20}$ és a $\frac{(2 + 5i)^{101}}{(2 - 5i)^{99}}$ komplex szám **abszolút értékét!**
6. Mi a mértani helye a síkon azoknak a pontoknak, amelyeknek megfelelő z komplex számokra:
- a) $|z - 1 + i| > 1$
b) $z - \bar{z} = 2i$
- 7*. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi(n!)$ pontosan akkor nem osztható n -nel, ha n prím!