

Gyakorló feladatok

1. Hány irreducibilis tényező szorzatára bomlik az $f(x) = -6x^3 + 6x^2 - 12$ polinom $\mathbb{Q}[x]$ -ben, $\mathbb{Z}[x]$ -ben, $\mathbb{R}[x]$ -ben, illetve $\mathbb{C}[x]$ -ben?
2. Határozzuk meg az $f(x) = -6x^3 + 6x^2 - 12$ és a $g(x) = 3x^2 - 3x - 6$ polinomok legnagyobb (azaz kitüntetett) közös osztóját $\mathbb{Q}[x]$ -ben és $\mathbb{Z}[x]$ -ben!
3. Irreducibilis-e az $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3$ polinom \mathbb{R} fölött, \mathbb{Q} fölött és \mathbb{Z}_2 fölött?
4. Bontsuk fel a

$$2x^6 - x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x + 5$$

polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Q}[x]$ -ben és $\mathbb{Z}_5[x]$ -ben!

5. Határozzuk meg az $x^3 + 3x^2 + 9x + 5$ polinom gyökeit a Cardano-képlet segítségével!
6. Lássuk be, hogy ha p páratlan prím, akkor $\Phi_{2p}(x) = \Phi_p(-x)$, és bizonyítsuk be ennek a polinomnak az irreducibilitását!
7. Tekintsük a $\Phi_{12} = x^4 - x^2 + 1$ körosztási polinomot.
 - a) Bizonyítsuk be, hogy $\Phi_{12}(ax + b)$ semelyik $a, b \in \mathbb{Z}$ -vel ($a \neq 0$) nem teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritériumot!
 - b) Bizonyítsuk be, hogy $x^4 - x^2 + 1$ reducibilis minden \mathbb{Z}_p fölött!
 - c) Lássuk be $\Phi_{12}(x)$ irreducibilitását más módszerrel!
8.
 - a) Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, és $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor $a - b \mid f(a) - f(b)$.
 - b) Keressünk olyan egész együtthatós polinomot, amelyre $\{f(-2), f(1), f(3)\} = \{2, 6, 11\}$ (nem feltétlenül ebben a sorrendben)!
9. Legyenek a, b, c az $x^3 - 2x^2 + 4x + 6$ polinom gyökei \mathbb{C} -ben. Adjunk meg egy harmadfokú polinomot, amelynek gyökei $a + b$, $a + c$ és $b + c$. (Ne számítsuk ki a gyököket, használjuk a gyökök és együtthatók közti összefüggéseket!

Házi feladatok

Beadási határidő: október 24.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Oldjuk meg Cardano-képlettel az $x^3 + 12x - 12 = 0$ egyenletet!
2. Bontsuk fel az $f(x) = x^6 - 7x^4 + 12x^2 + 2x - 4$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}[x]$ -ben és $\mathbb{Z}_5[x]$ -ben!
3. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^3 + 2x + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$ -ben, de semelyik $a \in \mathbb{Z}$ számmal nem teljesíti az $f(x + a)$ polinom a Schönemann–Eisenstein-kritériumot!
4. Számítsuk ki a $\Phi_9(x)$ körosztási polinomot, és bizonyítsuk be, hogy $\Phi_9(x)$ irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$ -ben!
5. Adjuk meg azt a legkisebb fokú racionális együtthatós $f(x)$ polinomot, amelyre $f(0) = f(1) = f(2) = 2$, és $f(-1) = 5$.
6. Legyen a, b, c az $2x^3 - x^2 + 3x + 6$ polinom három gyöke \mathbb{C} -ben. Határozzuk meg a következő kifejezések értékét:
 - a) $a + b + c$
 - b) abc
 - c) $a^2 + b^2 + c^2$
- 7*. Határozzuk meg azokat a $c \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyekre az $x^3 + 5x^2 + 2cx + c$ polinomnak van racionális gyöke!