

## Gyakorló feladatok

- Legkevesebb hány tagja van az  $f(x, y, z) = xy^3z - 2x^2y^3 + \dots$  szimmetrikus polinomnak? Írjuk fel ezt a minimális tagszámú polinomot úgy, hogy a tagjai lexikografikusan legyenek rendezve! Állítsuk elő elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként is!
- Legyenek  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  a komplex primitív ötödik egységgyökök. Írjuk fel azt az 1 főegyütthatós polinomot, amelynek gyökei az  $\varepsilon_i \varepsilon_j$  számok ( $1 \leq i < j \leq 4$ )! Bontsuk fel ezt a polinomot  $\mathbb{Q}[x]$ -ben irreducibilisek szorzatára! Hogyan általánosíthatnánk ezt  $p$ -edik primitív egységgyökökre, ahol  $p$  tetszőleges prím?
- Az alábbi mátrixok közül melyek vannak lépcsős, illetve redukált lépcsős alakban? A redukált lépcsőseknél írjuk fel a mátrixhoz tartozó lineáris egyenletrendszer megoldását!

$$\text{a) } \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$\text{b) } \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\text{c) } \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{d) } \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{e) } \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad & x + y + z = 4 \\ & -x + y - z = 2 \\ & 2x + y + 2z = 1 \\ & 4x + 4y + 4z = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \quad & 7x + 14y - 21z = 7 \\ & x + 2y - 3z = 1 \\ & 5x + 10y + 15z = 5 \\ & 3x + 6y - 9z = 3 \end{aligned}$$

Ki tudunk-e választani az eredeti egyenletek közül kevesebbet, melyek ugyanezt a megoldást adják? Melyeket?

- Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek:
  - 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és egyértelmű a megoldása;
  - 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
  - 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és nincs megoldása;
  - 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van és pontosan 5 megoldása van (van-e ilyen valós, illetve véges test fölötti egyenletrendszer)?
- Az  $a$  és  $b$  paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő mátrixhoz tartozó valós egyenletrendszernek? Oldjuk meg a feladatot  $\mathbb{Z}_2$  és  $\mathbb{Z}_3$  fölött is!

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -a & b \\ 1 & 3 & a & 0 \end{array} \right]$$

**Házi feladatok**

Beadási határidő: november 4.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkodni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Írjuk fel azt a homogén szimmetrikus  $f(x, y, z)$  polinomot, amelynek egyik tagja  $y^3z$  úgy, hogy a tagok lexikografikusan legyenek rendezve. Ezután állítsuk elő  $f$ -et elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként!
2. Legyen  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  az  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$  polinom három gyöke. Hozzuk közös nevezőre, majd állítsuk elő az  $f(x)$  együtthatóiból az  $\frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$  kifejezést!
3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ x - z &= -2 \\ 2x + y + z &= 7 \end{aligned}$$

4. Az alábbi mátrix egy olyan valós lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa, amelynek van megoldása. Írjunk be a \*-ok helyére olyan (nem feltétlenül azonos!) számokat, hogy ez a mátrix redukált lépcsős alakú legyen! Indokoljuk is, hogy miért azokat a számokat írtuk! Adjuk meg a kapott egyenletrendszer megoldását!

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & * & 1 & * & 0 \\ * & * & -1 & * & 2 \\ 0 & 0 & 0 & * & 1 \end{array} \right]$$

5. Az  $a$  és  $b$  értékétől függően hány megoldása van az alábbi valós egyenletrendszernek?

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= -1 \\ x - y + 2z &= a \\ x + by + z &= 3 \end{aligned}$$

6. Legyen adva egy  $k$  egyenletből és  $n$  ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer. Döntsük el, melyek igazak az alábbiak közül:
  - a) Ha  $k \leq n$ , akkor az egyenletrendszernek van megoldása.
  - b) Ha  $k > n$ , akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.
  - c) Ha  $k < n$  és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása is van.
  - d) Ha  $k > n$  és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor csak 1 megoldása van.
  - e) Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is.
  - f) Ha bármely  $k - 1$  egyenletet kiválasztva az így kapott egyenletrendszernek van megoldása, akkor az eredetinek is van megoldása.
- 7\*. Van-e olyan harmadfokú irreducibilis polinom  $\mathbb{Q}[x]$ -ben, amelyre igaz, hogy két ( $\mathbb{C}$ -beli) gyökének a szorzata a harmadik gyök?