

## Gyakorló feladatok

1. Legyen  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 2, -1), (1, 1, 0)\}$ .

a) Lássuk be, hogy  $\mathcal{B}$  bázis  $\mathbb{R}^3$ -ben!

b) Adjuk meg a  $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$  vektor koordinátavektorát a  $\mathcal{B}$  bázisra nézve!

c) Melyik az a  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  vektor, amelynek koordinátavektora a  $\mathcal{B}$  bázisra nézve

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}?$$

2. Mennyi a rangja annak a valós  $n \times n$ -es mátrixnak, amelynek az elemei sorfolytonosan leolvasva  $1, 2, \dots, n^2$ ?

3. Mennyi lehet annak az  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineáris leképezésnek a rangja, amelyre  $0 \neq \text{Im } f \leq \text{Ker } f$ ? Adjunk példát ilyen  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$  mátrixleképezéssel!

4. Tekintsük a következő mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = [1 \quad 2 \quad 4] \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki a  $BC$ ,  $CB$ ,  $5A$ ,  $A + D$ ,  $AD$ ,  $DA$ ,  $D^T D + A$  mátrixkifejezések közül azokat, amelyek értelmezve vannak!

5. Keressünk olyan  $2 \times 2$ -es és  $3 \times 3$ -as  $C$  valós mátrixokat, melyekre:  $C^2 = 0$ , de  $C \neq 0$ .

6. Mi történik egy  $n \times n$ -es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi mátrixokkal megszorozzuk?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

**Házi feladatok**

Beadási határidő: november 21.

*A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!*

1. Válasszuk ki az alábbi  $A$  mátrix oszlopterének egy bázisát az oszlopok közül, és írjuk fel mind az öt oszlop koordinátavektorát erre a bázisra nézve! Lehet-e más bázist is kiválasztani az oszlopok közül?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

2. Az 1. feladat  $A$  mátrixára adjuk meg  $A$  sorterének, nullterének és  $A^T$  nullterének is egy-egy bázisát!
3. Mennyi lehet annak az  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineáris leképezésnek a rangja, amelyre  $0 \neq \text{Ker } f \leq \text{Im } f$ ? Adjunk példát ilyen  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$  mátrixleképezésre!
4. Határozzuk meg az alábbi  $A$  mátrix rangját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1 + 2i \\ 3 & i & 3 - i \\ 4i & -3 & -1 + 4i \end{bmatrix}$$

5. Összesen legalább hány nemnulla eleme van az  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mátrixoknak, ha  $AB$ -ben nincs nulla elem?
6. Keressük meg az összes olyan  $2 \times 2$ -es valós  $X$  mátrixot, amelyik felcserélhető az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal! (Írjuk át az  $AX = XA$  mátrixegyenletet az  $X$  elemeire vonatkozó lineáris egyenletrendszeré!)

- 7\*. Bizonyítsuk be, hogy ha  $A \in K^{n \times n}$ , és  $r(A) < n$ , akkor van olyan  $X \in K^{n \times n}$  mátrix, amelyre  $r(X) = 1$ , és  $AX = XA$ . (Még olyan 1 rangú  $X$  is van, hogy  $AX = XA = 0$ .)  
Lássuk be, hogy  $r(A) = n$  esetén ez nem feltétlenül igaz, pl. az  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mátrixra sem.